目　　录

第 1 章

排列组合的简单计算

本章内容具有引论的性质，在这里我们将从复习最简单的排列、组合概念开始，逐步加以引伸，介绍了允许重复的排列、组合及圆排列等计数方法. 通过 Fibonacci 数的例子引进了递推关系和发生函数的解法，最后还介绍几个简单的组合恒等式. 对于具有一定基础的读者，本章可以略去不读.

§1 基本定义和公式

排列、组合问题是最简单的配置、分类和计数问题.

定义 从一集合 S 中有序地选取一组元素称为排列. 从一集合 S 中选取一组元素而不计其次序称为组合.

例如一个集合含有 n 个元素，它们中可以有相同的，也可以各不相同（一般在不作特殊声明时指 n 个不同元素），所谓从 n 个元素中取 r 个元素的排列是指从这 n 个元素中依次取出 r 个元素；而在 n 个元素中取 r 个元素的排列数是指从 n 个元素中依次取出 r 个元素的一切可能方法的数目.

在以下论述中，经常要用到加法律和乘法律两个规则：

加法律 若事物 A 有 m 种选取法，事物 B 又有另外 n 种选取法，则事物 A 与 B 任取其一的选法总数有 $m+n$ 种.

乘法律 若事物 A 有 m 种选取法，而后事物 B 又有 n 种选取法，则先 A 后 B 就共有 mn 种选取法.

加法律中着眼的是事物 A 和事物 B 具有互斥性，乘法律则着眼于事物 A 和事物 B 在选取过程中可能存在的依赖关系.

公式 1 从 n 个不同的元素中取 r 个不同元素的排列数 $P(n, r)$ 为

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1). \qquad (1.1)$$

证 1 设想有 r 个空格，现在我们来考虑有多少种方法能把 n 个不同的元素放到这 r 个空格中去(每格只放一个且必放一个).

首先，因为 n 个不同元素的任何一个均可放入第一个空格，所以第一个空格显然有 n 种放法. 在放第二个空格时，因为已经用掉了一个元素，只剩下 $n-1$ 个元素可供选取，所以有 $n-1$ 种放法. 依此类推，到放第 r 个空格时就只剩下 $(n-r+1)$ 个元素可供选取，所以只有 $(n-r+1)$ 种放法. 按乘法律，总的方法数为

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

也即自 n 算起的 r 个因子的乘积，其中每个因子比前一因子小 1，记成 $(n)_r$，读作 n 的"降 r 阶乘".

证 2 我们也可以用不重复地数尽这些排列方法来证明这个公式. 先把以元素 a_1 开始的那些排列数找出来. 由于起始元素已选定为 a_1，所以这就等于把 a_1 除外从 $n-1$ 个元素中选 $r-1$ 个的排列数. 具有确定起始元素的排列数为 $P(n-1, r-1)$. 我们把排列按起始元素来分类，n 个元素中的任何一个都可以选作起始元素，从而有 $P(n, r)=nP(n-1, r-1)$. 同理得到 $P(n-1, r-1)=(n-1)P(n-2, r-2)$. 如此下去，最终得到

$$P(n-r+2, 2)=(n-r+2)P(n-r+1, 1)$$

$$=(n-r+2)(n-r+1).$$

故有

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)=(n)_r.$$

第二个证明显然要比第一个证明麻烦些，但对复杂的排列组合问题，找第一种证明往往并非容易．但是只要能找到问题中可按一定规则的分类方法(本例中是按起始元素来分类)，再能找出这些分类之间的递推关系，加上已知的边界条件(在本例中为 $P(n-r+1, 1)=(n-r+1)$)，我们就可以找出一种计算排列(组合)数的方法．这种方法在实用中具有一定的普遍性，下面还可看到它的应用．

公式 2 从 n 个不同元素中取出 r 个元素来排成一个圆环状称为"圆排列"(按某种顺序——例如逆时针——看去完全相同者，认为是同一个圆排列)．由于对每一个固定的 n 个取 r 个的圆排列均恰有 r 种不同的方式展成 r 个不同的"直线排列"；不同的圆排列展成的直线排列彼此也必不同．全部圆排列展出的恰好就是全部直线排列，因此直线排列数是圆排列数的 r 倍．由此即得，若以 $K(n, r)$ 表示所说的圆排列数，则

$$K(n, r)=P(n, r)/r=(n)_r/r. \qquad (1.2)$$

特别，n 个元素取 n 个的圆排列，即用全部 n 个元素所作成的圆排列的总数为

$$K(n, n)=n!/n=(n-1)!.$$

如果在作圆排列时，对于顺时针逆时针的排列不加区别，即按顺时针或逆时针看去完全一致时认为是同一个，则圆排列数显然减半 ($r\geqslant 3$)．此时，n 个取 r 个的圆排列总数即为 $(n)_r/2r$.

公式 3 n 个不同元素每次取 r 个作排列，但在选取过程

中任何元素均允许重复出现，这种排列称为"n个元素允许重复取r个的排列"．这种排列的个数比上面的更好求，因为r个元素中的第一个有n种取法，而对于第一个元素的任何一种固定取法，第二个元素均仍有n种方法可供选取．按乘法律，前二元共有n^2种取法．依此类推，知所求排列总数为n^r．

公式 4 若n个元素中有一些相同而不能区别，例如有α个x，β个y，$\cdots$，γ个z，$(\alpha+\beta+\cdots+\gamma)=n$．则由此$n$个元素作成的全排列的总数为$n!/\alpha!\beta!\cdots\gamma!$．

证明 任取一个这种排列，设想将其中的α个x分别赋以足标1, 2, $\cdots$, α，则这种填写足标的办法便有$\alpha!$种，又对其中β个y亦赋以足标仍有$\beta!$种办法，如此等等，直到对γ个z也有$\gamma!$个填写足标的办法．这样由每个满足要求的排列便可演化出$\alpha!\beta!\cdots\gamma!$个赋足标的排列，因此所求排列的$\alpha!\beta!\cdots\gamma!$倍便是全部赋足标的排列，而后者恰就是$n$个不同元素的全排列的总数，即$n!$，由此即知欲证为真．

公式 5 从n个元素中取r个元素的组合数为

$$C(n, r)=\binom{n}{r}=n(n-1)\cdots(n-r+1)/1\cdot2\cdots r$$
$$=(n)_r/r!. \tag{1.3}$$

证明 利用从n个元素中取r个元素的每一个组合去作排列都可以得到$r!$个不同的排列，而这些排列在从n个元素中取r个元素的排列中都必出现一次且仅出现一次，因而有$C(n, r)\cdot r!=P(n, r)$．也即$C(n, r)=P(n, r)/r!$．上下乘以$(n-r)!$得

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}. \tag{1.4}$$

今后约定$\binom{n}{r}=0$ ($r<0$ 或 $r>n$). 易见这种约定符合(1.3)式的要求.

推论 1
$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}. \tag{1.5}$$

此式从(1.4)很易得到, 但从组合数学的角度,我们希望能对它给出一种组合解释. 组合解释本身也是一种证明. 从 n 个元素中取 r 个元素的组合无非是把 n 个元素拆成两部分. 一部分是取出的 r 个元素, 另一部分则是剩下的 $n-r$ 个元素. 当一旦选定了某 r 个元后,剩下的 $n-r$ 个元也就随之而被确定了. 这样,取 r 个元素的组合同取 $n-r$ 个元素的组合形成了一一对应. 所以先选 r 元和先选 $n-r$ 元可看成是一回事,从而推论得证.

推论 2
$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}. \tag{1.6}$$

这个等式很重要,因为它是联系 n 个组合数和 $n-1$ 个组合数的一个递推关系. 其组合意义也很显然. 在 n 个元素中指定一个元素,比如 a, 则$\binom{n-1}{r}$就表示 n 个元素中取 r 个元素但不含元素 a 的组合数, $\binom{n-1}{r-1}$则是 n 个元素中取 r 个元素但必含 a 的组合数. 利用加法律就得(1.6)式.

推论 3
$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\cdots+\binom{r-1}{r-1}=\binom{n}{r}. \tag{1.7}$$

可以重复应用(1.6)来推出此式. 又若设 n 个元素为 a_1,

$a_2, \cdots, a_n$, 则亦可将组合总数$\binom{n}{r}$看成是必含 a_1; 不含 a_1 但必含 a_2; 不含 a_1, a_2 但必含 a_3; $\cdots$; 不含 $a_1, \cdots, a_{n-r}$ 但必含 a_{n-r+1} 这些互斥的 $n-r+1$ 类组合之和. 应用加法律即得.

推论 4

$$\binom{n-1}{r}+\binom{n-2}{r-1}+\cdots+\binom{n-1-r}{0}=\binom{n}{r}. \tag{1.8}$$

这由推论 1 和推论 3 经过简单变换即可得到.

从以上几个例子来看，其证明方法都是把组合问题中的各种组合方法看成一个集合，而按某种分类法将它分成互不相交(互斥)的一些子集，再利用加法律求得问题的解. 这是组合数学中常用的方法.

定义

$$\binom{\alpha}{r}=\frac{(\alpha)_r}{r!}=\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}. \tag{1.9}$$

这个定义是比照有组合意义的$\binom{n}{r}$的公式得来的，其中 α 可以是任意实数乃至复数. 特别$\binom{\alpha}{0}=1$. 又由(1.9)立即推出

$$\binom{-n}{r}=(-1)^r\binom{n+r-1}{r}. \tag{1.10}$$

定义

$$\binom{-n}{-r}=(-1)^{n+r}\binom{r-1}{n-1}. \tag{1.11}$$

所以要引进这个定义的理由乃是受(1.5)式的启发. 当

$-r>-n$ 时，即 $r<n$，左右两端均为 0，而当 $r\geqslant n$ 时，用(1.5)式，应有

$$\binom{-n}{-r}=\binom{-n}{r-n}=(-1)^{r-n}\binom{n+(r-n)-1}{r-n}$$
$$=(-1)^{r-n}\binom{r-1}{r-n}=(-1)^{r+n}\binom{r-1}{n-1}. \quad (1.12)$$

现在讨论允许重复的组合.

公式 6 在元素允许重复选取时，从 n 个不同元素中取 r 个元素的组合数为

$$f(n,\ r)=\binom{n+r-1}{r}. \quad (1.13)$$

证明 今介绍 Euler 的证明. Euler 证明的思想是找一个等价的易于分拆的问题. 设想这 n 个元素和自然数 1, 2, …, n 一一对应，于是所考虑的任何组合便可看成是一个 r 个数的组合 $\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r\}$. 因为是组合，不妨认为各 c_i 是按大小次序排列的；相同的 c_i 连续地排在一起，在这组数的基础上，我们构造另一组数 $\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r\}$ 和它对应. 其中令 $d_i=c_i+i-1,\ i=1,\ 2,\cdots,\ r$. 即 $d_1=c_1+0, d_2=c_2+1,\cdots$. 如此，即使有的 c_i 有重复，但这些 d_i 就不会有相同的了. 易见有一种 $\{c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r\}$ 的取法，便有一种 $\{d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_r\}$ 的取法. 而且这两种取法有一一对应的关系，从而这两个组合计数问题是等价的. c_i 最大可取 n，故 d_i 最大可取 $n+r-1$. 所以允许重复的从 n 个不同元素中取 r 个元素的组合数和不允许重复的从 $n+r-1$ 个不同元素中取 r 个元素的组合数是一样的. 后者显见是 $\binom{n+r-1}{r}$，故公式得证.

§2 枚举子、发生函数、递推关系简介

以两个骰子掷出 6 点为例，出现 1, 5 有两种选法，出现 2, 4 也有两种选法，出现 3, 3 只有一种选法．这些选法显然是互斥的且穷尽了出现 6 点的一切可能选法，因而按加法律共有 $2+2+1=5$ 种不同选法．

但也可以从另外一种观点来看，要使两个骰子掷出 6 点．第一个骰子可选除 6 以外的任何点数，这有 5 种选法．一旦第一个骰子的点数选定后，第二个骰子就只有一种可能的选法故按乘法律共有 $5\times1=5$ 种选取方法．

这两种方法在两个骰子的情形下还比较简单，但碰到用三个或四个骰子掷出 n 点时就不胜其烦了．这就需要引进新的方法．设想把骰子出现 1 点到 6 点和 t 到 t^6 对应起来，则第一个骰子可能出现的点数就和 $(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)$ 中 t 的各次幂一一对应．若有两个骰子，则

$$(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)$$
$$=t^2+2t^3+3t^4+4t^5+5t^6+\cdots$$

中 t^6 的系数 5 显然相当于 $t^1\cdot t^5=t^6$, $t^2\cdot t^4=t^6$, $t^3\cdot t^3=t^6$, $t^4\cdot t^2=t^6$, $t^5\cdot t^1=t^6$ 诸乘积都产生 t^6 这一项的方式数．也就是说有一种掷出 6 点的方法，就有一种结合成 t^6 的乘幂方法与之对应．这种一一对应关系就把掷骰子这个组合问题中的加法律和幂级数中 t 的乘幂的相加对应起来，从而使两个骰子掷出 6 点的方法数等价于求 $f(t)=(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^2$ 中 t^6 的系数．$f(t)$ 称为（掷两颗骰子的点数和的）“发生函数”．$(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)$ 称为“枚举子” (enumerator)．这样，求三个或四个骰子掷出 n 点的方法数就只需求 $(t+t^2+\cdots+$

$t^6)^3$ 或 $(t+t^2+\cdots+t^6)^4$ 中 t^m 的系数就可以了.

易见从 n 个元素中取 r 个元素的组合数 $\binom{n}{r}$ 是 $(1+t)^n$ 中 t^r 的系数（这只须将 t^1 理解为"取"，把 $t^0=1$ 理解为"不取"），从而

$$(1+t)^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}t^r, \tag{1.14}$$

所以 $\binom{n}{r}$ 的发生函数就是 $(1+t)^n$. 一般说来，如果 c_0, c_1, c_2, $\cdots$, c_n, $\cdots$ 为一串已知的或待定的常数，则形式幂级数 $F(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kt^k$ 就叫做数列 $\{c_n\}$ 的发生函数. 关于发生函数的一般方法，我们在第二章中还将详细讨论.

由上可见，引进发生函数方法可以对组合问题的求解有一个比较统一的处理方法. 其好处是明显的. 但是发生函数的具体形式通常并不能直接由枚举予获得的，有时要借助于所谓"递推关系". 往下我们将看到每个组合问题都有它的组合结构. 有时候，这个结构可以用某种递推关系来描写或刻划. 现在我们举一个著名例子.

13 世纪意大利著名数学家 Fibonacci 在他的著作"算盘书"（Liber abacci）中记载着这样一个有趣的问题——兔子问题："某人想知道一年内一对兔子可以繁殖成多少对兔子. 他筑了一道围墙将兔子关在里面，观察并逐月记录兔子的对数. 假设兔子的生殖力是这样的：每一对成兔每月生一对幼兔. 幼兔经过两个月后成为成兔，即开始繁殖. 问一对兔子一年内繁殖成几对？"

假定在 1 月初买来这对成兔，到 1 月末生出一对幼兔，那么整个 1 月份内兔子对数为 1，到 2 月份兔子对数就变成 2.

2 月末，原来的一对成兔又生出一对幼兔，而另一对兔子(1 月末生的)还不具备生育能力，所以在 3 月份中总共有 3 对兔子．其中两对到月末即繁殖，于是到 4 月份便有 5 对；其中 3 对到月末能从事繁殖，这样到 5 月份便成为 8 对．到 5 月末，5 对原有的能繁殖，另外 3 对新生的则不能，于是到 6 月份就变成了 5+8=13 对．其中有 8 对到月末又全能繁殖，…．如此继续下去，在一年中各月份所记录的兔子的对数应如下表：

月 份	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	十一	十二	来年初
兔子对数	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

这样我们看到，一对兔子在经过一年的繁殖之后，便得到了 377 对兔子．

以 f_n 表示第 n 个月中的对数，后人为了纪念它的发明者，便称之为第 n 个 Fibonacci 数(简称 F 数)．$\{f_n\}$ 便叫作 Fibonacci 数列．Fibonacci 数不仅本身有许多有趣的性质，而且在近代优化理论中起着重要的作用．但在此处我们只是作为例子用以说明用发生函数来解线性递推关系的方法．

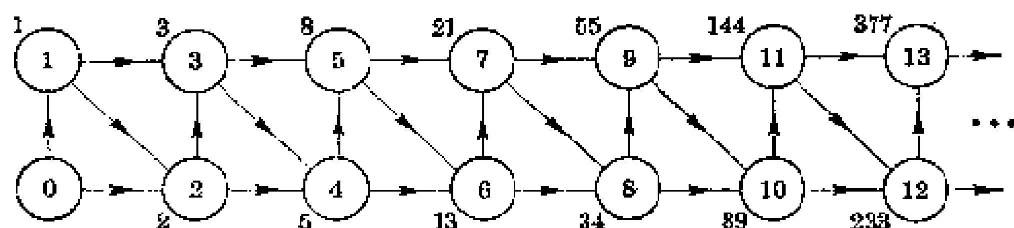
现在让我们来分析一下 F 数之间的结构关系．f_n 是第 n 个月中兔子的对数，它实际上只依赖于第 $n-1$ 个月中的兔子对数 f_{n-1} 和第 $n-2$ 个月中的兔子对数 f_{n-2}．在第 $n-1$ 个月中的 f_{n-1} 对兔子中，到月末能繁殖的是前月已有的 f_{n-2} 对，而到月末不能繁殖的是上月末新出生的那些即 $(f_{n-1}-f_{n-2})$ 对，所以第 n 个月较第 $n-1$ 个月新增的兔子对数(即第 $n-1$ 个月月末新生兔子的对数)恰为第 $n-2$ 个月中已有的兔子对数，即 f_{n-2} 对，于是得

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2},\quad n\geqslant 3. \tag{1.15}$$

这就表明，任何一个月份的兔子对数总等于上月和大上月兔

字的对数和，这就是 F 数的递推关系．于是结合初值 $f_1=1$, $f_2=2$ 便可从(1.15)式依次推出任何的 f_n. 但是这种方法手续麻烦，显然不能令人满意，下面将借助于递推关系(1.15)，用推导发生函数的办法，一次就找到关于 f_n 的封闭型的表达式. 不妨补充一个 f_0, 令 $f_0=1$, 则初始值变成 $f_0=f_1=1$, 而递推关系(1.15)从 $n=2$ 起即开始成立.

为了进一步理解 F 数的递推关系，让我们再来看看称为"道路模型"的下述问题：



有一个道路区如上图，某人从 0 点出发以任意的方式按箭头所示的方向走到某指定点，问有多少种不同的走法？倘若以 f_n 表示从 0 点走到标号为 n 的顶点的走法数，则显然 $f_1=1$, $f_2=2$, 在求 f_3 时，只须注意到，到达 3 的任何一条路线必先经过 2 或 1，且到 1 及 2 的任何一种走法均可直接导出走到 3 的一种唯一走法，所以 $f_3=f_2+f_1=2+1=3$. 一般地，走到 n 的走法数总等于走到 $n-1$ 和走到 $n-2$ 的走法之和，所以道路模型所导出的数不是别的，也正是 F 数.

为了从递推关系

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \quad n\geqslant 2 \tag{1.16}$$

及初始值

$$f_0=1, \quad f_1=1 \tag{1.17}$$

确定出所有 F 数，让我们以 F 数为系数构造一个形式幂级数：

$$F(t)=f_0+f_1t+f_2t^2+\cdots+f_nt^n+\cdots, \tag{1.18}$$

这就是 Fibonacci 数的发生函数.

将(1.18)两端乘 t, 乘 t^2 分别得到

$$tF(t)=f_0t+f_1t^2+f_2t^3+\cdots+f_{n-1}t^n+f_nt^{n+1}+\cdots,$$

$$t^2F(t)=f_0t^2+f_1t^3+\cdots+f_{n-2}t^n+f_{n-1}t^{n+1}+\cdots.$$

两式相加,并利用(1.16)即得

$$\begin{aligned}&tF(t)+t^2F(t)\\&=f_0t+(f_1+f_0)t^2+(f_2+f_1)t^3+\cdots\\&\quad+(f_{n-1}+f_{n-2})t^n+\cdots\\&=t+f_2t^2+f_3t^3+\cdots+f_nt^n+\cdots=F(t)-1,\end{aligned}$$

由此解得

$$F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}. \tag{1.19}$$

令 $$F(t)=\frac{1}{1-t-t^2}=\frac{1}{(1-at)(1-bt)},$$

比较系数得 $ab=-1$, $a+b=1$, 其解为

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad b=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

将 $F(t)$分解成部分分式,令为

$$F(t)=\frac{\alpha}{1-at}+\frac{\beta}{1-bt},$$

则 $$\alpha(1-bt)+\beta(1-at)=1,$$

令 $t=\frac{1}{a}$, $t=\frac{1}{b}$ 分别代入,即解得

$$\alpha=\frac{a}{a-b},\quad \beta=\frac{b}{b-a},$$

于是

$$F(t)=\frac{1}{a-b}\left(\frac{a}{1-at}-\frac{b}{1-bt}\right). \tag{1.20}$$

将$(1-at)^{-1}$, $(1-bt)^{-1}$展开得

$$F(t)=\frac{1}{a-b}\sum_{k=0}^{\infty}[a(at)^k-b(bt)^k]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}t^k. \qquad (1.21)$$

由此得

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \qquad (1.22)$$

$$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

这就是Fibonacci数的封闭型表达式.

§3 组合恒等式

组合恒等式在计算组合数学中占有重要地位，但在本章中只讨论一些简单的恒等式.

前几节中，从组合问题的分类已经得到过一些恒等式，如按含与不含某元素作标准进行分类所得的(1.6)式

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r}.$$

组合恒等式也可以利用发生函数来获得. 熟知

$$(1+t)^n=\sum_{0}^{n}\binom{n}{r}t^r.$$

令$t=1$, 则

$$2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}. \qquad (1.23)$$

这个组合恒等式的组合意义也很清楚，因为n个不同事物的全部组合数当然等于各个个别事物选或不选的一切可能方法数. 令$t=-1$, 则

$$0=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}$$

$$-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}. \tag{1.24}$$

将(1.23)式减(1.24)式得

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{2r}=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{2r+1}=2^{n-1}. \tag{1.25}$$

把 n 写成 $n=n-m+m$，则有

$$(1+t)^n=(1+t)^{n-m}(1+t)^m.$$

将两边展开比较 t^r 的系数即得

$$\binom{n}{r}=\sum_{k=0}^{r}\binom{n-m}{k}\binom{m}{r-k}. \tag{1.26}$$

这就是 Vandermonde 恒等式．很容易给出它的组合解释．比方说，可以这样设想，甲班有 $n-m$ 个学生，乙班有 m 个学生，今从两班中抽出 r 个学生参加义务劳动．则所有抽法数为$\binom{n}{r}$，它可以分成甲班抽 k 个同时乙班抽 $r-k$ 个，k 从 0 到 r 的各种可能情形．关于 Vandermonde 恒等式，有许多其它记法．用降阶乘表示，它可写成

$$(n)_r=\binom{n}{r}r!=r!\sum_{k=0}(n-m)_k(m)_{r-k}/k!(r-k)!$$

$$=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(n-m)_k(m)_{r-k}. \tag{1.27}$$

以 $-m$ 代 m 得

$$(n)_r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(n+m)_k(-m)_{r-k}. \tag{1.28}$$

以升阶乘表示

$$(n)^r=\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(n-m)^{(k)}m^{(r-k)}, \qquad (1.29)$$

其中 $n^{(r)}=n(n+1)\cdots(n+r-1)=(-1)^r(-n)_r$ 为 n 的升 r 阶乘. 角标(r)是用以区别于 r 次幂.

还有一个经常用的组合恒等式是

$$\binom{n}{r}\binom{r}{p}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{r-p}. \qquad (1.30)$$

应用组合表达式代入, 很容易验证两端均等于 $n!/p!(r-p)!(n-r)!$. 实际上等式两端均表示将 n 个不同元素分成含 p 个的, 含 $r-p$ 个的, 含 $n-r$ 个的有序的三组的所有方法数. 附带说一句, 有时将 $n!/i!j!(n-i-j)!$ 记作$\binom{n}{i,\ j}$, 并称为多项式系数.

利用(1.30), 容易得出

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{n}{k}=0, \qquad (1.31)$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{n-m}\binom{n}{k}=2^m\binom{n}{m}, \qquad (1.32)$$

及

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n} \qquad (1.33)$$

等恒等式. H. W. Gould 在他的《组合恒等式》一书中列举了九种证明组合恒等式的方法, 它们是:

1. 比较级数展开式中的系数;
2. 微分积分法;
3. 有限差分法;
4. 差分方程或递推关系法;

5. 数学归纳法;

6. 数格点法;

7. 排列组合理论(组合解释);

8. 级数变换;

9. 多项式的有限 Taylor 展开.

下面我们介绍两个我国数学史上有名的组合恒等式.

1. 朱世杰恒等式

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\cdots+\binom{n+m}{n}=\binom{m+n+1}{n+1}, \tag{1.34}$$

这个恒等式实际上就是推论 3 (1.7) 式的另一种写法. 那里曾经给出过它的组合解释, 此处我们用发生函数法, 也即用级数展开比较系数法来给出另一种证明.

$$(1-x)^{-n-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m}{n}x^m,$$

$$(1-x)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m,$$

把右端两级数相乘取其 x^m 的系数就是(1.34)式的左端, 而

$$(1-x)^{-1}(1-x)^{-n-1}=(1-x)^{-n-2}$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{n+m+1}{m}x^m,$$

其中 x^m 的系数恰好是(1.34)式的右端, 故等式成立.

2. 李善兰恒等式

$$\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{n+k+l-j}{k+l}=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}. \tag{1.35}$$

李善兰恒等式的证法有好几种, 这里仅举一例. 利用 Van-

dermonde 恒等式及公式

$$\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{p}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-\nu}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{\nu-p},$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{n+k+l-j}{k+l}\\
&\quad=\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\left(\sum_{\nu\geq j}\binom{n+k}{k+\nu}\binom{l-j}{l-\nu}\right)\\
&\quad=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{k+\nu}\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{j}\binom{l-j}{l-\nu}\\
&\quad=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{k+\nu}\sum_{j\geq 0}\binom{k}{j}\binom{l}{\nu}\binom{\nu}{j}\\
&\quad=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{k+\nu}\binom{l}{\nu}\binom{k+\nu}{k}\\
&\quad=\sum_{\nu\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n}{n-\nu}\binom{l}{\nu}\\
&\quad=\binom{n+k}{k}\sum_{\nu\geq 0}\binom{n}{n-\nu}\binom{l}{\nu}\\
&\quad=\binom{n+k}{k}\binom{n+l}{l}.
\end{aligned}$$

第 2 章

发生函数方法

§1 方法概述

发生函数方法是一套非常有用的方法，它的应用很广．这套方法的系统叙述，最早见于 Laplace 在 1812 年出版的名著《概率解析理论》中．这方法的思想十分简单，就是把离散数列和幂级数一一对应起来，把离散数列间的相互结合关系对应成为幂级数间的运算关系，最后由幂级数形式来确定离散数列的构造．

扼要说来，发生函数方法就是把一个有限或无限的数列

$$\{a_k\} \equiv \{a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots\}$$

和如下形式的幂级数

$$A(t) \equiv a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k + \cdots$$

联系起来，构成对应关系 $\{a_k\} \leftrightarrow A(t)$．这个 $A(t)$ 就称为 $\{a_k\}$ 的发生函数，$\{a_k\}$ 叫做 $A(t)$ 的生成序列．

当涉及有关排列的问题时，常使用如下形式的幂级数作为发生函数

$$E(t) \equiv a_0 + a_1 t + \frac{a_2}{2!} t^2 + \cdots + \frac{a_k}{k!} t^k + \cdots,$$

这叫做 $\{a_k\}$ 的指数型发生函数．

为了看出发生函数的作用，不妨先举一个古典概率论中的例子：设将一颗骰子连掷 10 次，问一共出现 30 点的机会

(概率)是多少?

骰子掷一次，出现的点数可以是 1, 2, 3, 4, 5, 6. 不妨用 t^1, t^2, t^3, t^4, t^5, t^6 来表示，于是下列多项式(有限项幂级数)

$$t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6$$

就枚举了点数呈现的各种可能情况. 这个多项式就叫做点数出现状况的枚举子(参见第一章).

如果将骰子连掷 10 次，则将枚举子连乘 10 次，即可见 10 次点数的一切呈现方式都包含在下列乘积

$$(t^1+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^{10}$$

的展开式中. 例如，展开式中的 $t^3\cdot t^4\cdot t^2\cdot t^6\cdot t^1\cdot t^2\cdot t^3\cdot t^5\cdot t^3\cdot t^1=t^{30}$ 这一项即表示各次出现的点数是: 3, 4, 2, 6, 1, 2, 3, 5, 3, 1(一共是 30 点). 因此如果记

$$(t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6)^{10}=\sum_{k=10}^{60} c_k\cdot t^k,$$

则 c_k 即代表掷 10 次所得点数之和等于 k 的一切方法数. $\sum c_k t^k$ 就是数列 $\{c_k\}$ 的发生函数. 用概率论的语言来说，我们所考虑的随机试验是具有 6^{10} 个等可能结果的古典概型(或由 10 个小试验联合组成的独立试验序列). 而对所求概率的事件(共出 30 点)有利的等可能结果数就是 c_{30}, 因此所求概率即等于 $c_{30}/6^{10}$. 下面我们来计算 c_{30}.

注意 $$\sum_{k=10}^{60} c_k t^k=t^{10}\cdot(1-t^6)^{10}\cdot(1-t)^{-10},$$

所以 c_{30} 即等于 $(1-t^6)^{10}(1-t)^{-10}$ 展开式中 t^{20} 的系数. 由于

$$(1-t^6)^{10}=1-\binom{10}{1}t^6+\binom{10}{2}t^{12}-\binom{10}{3}t^{18}+-\cdots$$

$$(|t|<1),$$

$$(1-t)^{-10}=1+\binom{10}{1}t+\binom{11}{2}t^2+\cdots$$
$$+\binom{10+k-1}{k}t^k+\cdots,$$

故可立即算出

$$c_{30}=\binom{29}{20}-\binom{10}{1}\binom{23}{14}+\binom{10}{2}\binom{17}{8}-\binom{10}{3}\binom{11}{2}$$
$$=2930455,$$

因此所求概率为

$$2930455/6^{10}=2930455/60466176.$$

这个例子表明，一些离散概率的计算问题，采用发生函数方法来处理会是很简便的.

§2 发生函数的一般方法

古典分析家使用发生函数这个工具时，往往把发生函数局限于收敛的幂级数. 这样一来，连如此简单的数列 $\{k!\}$ 也不可能有发生函数了，因为对应的幂级数 $\sum_0^\infty k!t^k$ 并不存在收敛区间(此级数的收敛半径为 0).

但只须采用抽象代数中的环论观点，便能彻底克服上述局限性. 这一点在 20 年代 E. T. Bell 的著作中早就阐明了. 近代的组合分析家 G.C. Rota 等人还对发生函数的一般概念和方法作了进一步的发展.

按照近代的观点，对应于任意数列 $\{a_k\}$ 的发生函数 $A(t)\equiv\sum_{k=0}^\infty a_kt^k$ 不过是一种"形式幂级数"，其中 t 是一个不加

定义的抽象记号．只须在形式幂级数之间适当地定义了加法和乘法之后，便可使一切形式幂级数作成一个交换环(commutative ring)，而形式幂级数成为环中的元素．今概述大意如下：

考虑一切由实数作成的序列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$，$\{c_k\}$ 等等．如果它们相应的发生函数（形式幂级数）依次记成 $A(t)$，$B(t)$，$C(t)$等等，于是加、乘两种运算即按下述方式规定：

加法　　$C(t)=A(t)+B(t)$，当且仅当

$$c_k=a_k+b_k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots.$$

乘法　　$C(t)=A(t)B(t)$，　当且仅当

$$c_k=a_kb_0+a_{k-1}b_1+\cdots+a_{k-j}b_j+\cdots+a_0b_k,$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

这里的 c_k 叫做数列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 的卷积，又称 **Cauchy** 乘积．

这样，一切以实数为系数的形式幂级数便作成一个交换环，环中的零元素与单位元素分别为 $0+0t+0t^2+\cdots$ 与 $1+0t+0t^2+\cdots$．显然环的一切公理都是满足的．

如果 $A(t)$中的常数项 $a_0\neq 0$，则还可按下述条件

$$A(t)A'(t)=A'(t)A(t)=1$$

确定 $A(t)$ 的乘法逆元 $A'(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a'_kt^k$．将上式左端按乘法规则乘开后，比较同次幂系数即得方程组

$$a_0a'_0=1,$$

$$a_ka'_0+a_{k-1}a'_1+\cdots+a_0a'_k=0,$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,$$

由此可得

$$a'_k=(-1)^k a_0^{-k-1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-4} & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}.$$

既然形式幂级数按如上规定的加、乘运算构成交换环，而且对具有非零常数项的形式幂级数，还可求其逆 $A'(t)=1/A(t)$，因此一如收敛级数的情况那样，四则运算可以畅行无阻．又因为如上规定的运算方式与收敛级数间的运算是一模一样的，所以在特别情况（即当幂级数为解析函数的情况），计算的最终结果——即由发生函数最终确定的数列，总是一致的．

往后我们采用的发生函数都是形式幂级数（而解析函数不过是形式幂级数的特例），所以只要运算没有越出上面所述及的范围，可以一律不用顾及收敛性问题．

对交换环中的形式幂级数还可以引进形式导数．令 $D\equiv d/dt$ 表微分算符，则 $DA(t)$ 可按下式定义：

$$DA(t)\equiv a_1+2a_2t+\cdots+ka_kt^{k-1}+\cdots,$$

而 j 阶导数为

$$D^jA(t)\equiv j!\,a_j+\cdots+(k)_ja_kt^{k-j}+\cdots,$$

其中 $(k)_j$ 为第一章已讲过的 k 的 j 次降阶乘，即

$$(k)_j=k(k-1)\cdots(k-j+1).$$

如果将任意数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 等分别对应的发生函数依次改记为 $G\{a_k\}$，$G\{b_k\}$ 等等，则根据交换环中定义的加法、乘法、求导等运算可得下列诸关系式：

（i） $G\{a_k\}+G\{b_k\}=G\{a_k+b_k\}$；

(ii) $G\{a_k\}\cdot G\{b_k\}=G\left\{\sum_{j=0}^{k}a_jb_{k-j}\right\}$;

(iii) $G\{(k)_ja_k\}=t^jD^jA(t)=t^j\left(\frac{d}{dt}\right)^jG\{a_k\}$,

这些关系式对具体计算是很有用的.

简记 $G\{a_k\}=A(t)$，则对一些简单数列的发生函数可列表如下：

1° $G\{1\}=\frac{1}{1-t}$,

2° $G\{k\}=\frac{t}{(1-t)^2}$,

3° $G\left\{\frac{1}{k}\right\}=-\log(1-t)$,

4° $G\left\{\frac{\alpha^k}{k}\right\}=-\log(1-\alpha t)$,

5° $G\left\{\frac{(-1)^k}{2k+1}\right\}=\frac{1}{\sqrt{t}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{t}$,

6° $G\left\{\frac{1}{k!}\right\}=e^t$,

7° $G\left\{\frac{(-1)^k}{(2k)!}\right\}=\cos\sqrt{t}$,

8° $G\left\{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\right\}=\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\sqrt{t}$,

9° $G\left\{\binom{\alpha}{k}\right\}=(1+t)^\alpha$,

10° $G\left\{\binom{n+k}{k}\right\}=(1-t)^{-n-1}$.

这些公式的验证十分简单，只须将相应的解析函数展开成幂级数即得(留给读者自己验证).

以后各节将讲述发生函数方法的种种应用.

§3 发生函数对组合恒等式的应用

在这一节我们举几个典型例子来说明发生函数对证明(或推导)组合恒等式的应用.

例 1 (Vandermonde 卷积定理)设 α, β 为非零实数,则有下列恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}=\binom{\alpha+\beta}{n}. \tag{2.1}$$

这一恒等式的特例已在第一章中证明过. 注意当 $n=0$, 1, 2, … 时, (2.1)式左端给出的数列正好是数列 $\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}$ 与 $\left\{\binom{\beta}{n}\right\}$ 的卷积(Cauchy 乘积)数列, 故根据本章 §2 中的运算性质(ii)及二项式定理, 立即可得

$$G\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k}\right\}=G\left\{\binom{\alpha}{n}\right\}\cdot G\left\{\binom{\beta}{n}\right\}$$

$$=(1+t)^{\alpha}\cdot(1+t)^{\beta}=(1+t)^{\alpha+\beta}=G\left\{\binom{\alpha+\beta}{n}\right\}.$$

例 2 设 p, q 为任意正整数, 则有组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}=\binom{n+1}{p+q+1}. \tag{2.2}$$

鉴于左端出现形如 $\left\{\binom{k}{p}\right\}$, $\left\{\binom{j}{q}\right\}$ 的数列, 自然想到利用如下的两个发生函数(参考本章 §2, 10°):

$$(1-t)^{-p-1}=\sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}t^{k-p},\ (1-t)^{-q-1}=\sum_{j=q}^{\infty}\binom{j}{q}t^{j-q}.$$

将上述两个发生函数相乘，则得

$$(1-t)^{-p-q-2}=\sum_{n=p+q}^{\infty}\binom{n+1}{p+q+1}t^{n-p-q}.$$

又若将两个发生函数的右端相乘，则得

$$\left(\sum_{k=p}^{\infty}\binom{k}{p}t^{k-p}\right)\left(\sum_{j=q}^{\infty}\binom{j}{q}t^{j-q}\right)$$

$$=\sum_{n=p+q}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p}\binom{n-k}{q}\right)t^{n-p-q}.$$

比较上列两式右端 t^{n-p-q} 的系数，便得到所要证明(2.2)式.

例 3 令 p 为不大于 n 的非负整数．考虑如下的发生函数

$$\binom{n}{p}(1+t)^{n-p}=\frac{1}{p!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p}(1+t)^{n}$$

$$=\frac{1}{p!}\left(\frac{d}{dt}\right)^{p}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{k}\right]$$

$$=\frac{1}{p!}\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}k(k-1)\cdots(k-p+1)t^{k-p}.$$

于是令 $t=1$，可得恒等式

$$\binom{n}{p}2^{n-p}=\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}, \tag{2.3}$$

又如令 $t=-1$，则得恒等式

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{p}(-1)^{k+p}=\begin{cases}1, & \text{当 } p=n,\\ 0, & \text{当 } p<n.\end{cases} \tag{2.4}$$

这个等式表明 $\left\{(-1)^{k}\binom{n}{k}\right\}$ 与 $\left\{(-1)^{p}\binom{k}{p}\right\}$ 是一对互成直交关系的数列(当 $p\neq n$ 时)．正是这一事实使得(2.4)式在组合分析中极为有用．

例 4 考虑发生函数 $f(x)=(1-x^2)^n\cdot(1-x)^{-(n+1)}$ 中的 x^n 的系数，可得下述组合恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n-2k}{n}\binom{n}{k}=2^n, \tag{2.5}$$

请读者自行完成这一恒等式的证明.

上举四例表明利用二项式展开级数作为发生函数可以导出种种有用的组合恒等式. 组合恒等式的研究已成为组合分析学的一个受人注意的分支. H. W. Gould 编著的《组合恒等式》一书(1972 年的修订版)中，罗列有 500 多个组合公式，值得参考.

§4 线性递归数列方程的解法

满足下列线性递归方程

$$f(n+2)-\alpha f(n+1)-\beta f(n)=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{2.6}$$

的数列 $\{f(n)\}$ 称之为**递归数列**，其中 α, β 为任意给定常数，$f(0)=a_0$, $f(1)=a_1$ 为给定的初始条件. 只要数值 a_0, a_1 为已知，则反复利用递推关系(2.6)即可逐步确定 $f(n)$, $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$. 所谓求解方程(2.6)，就是要求找出 $f(n)$的普遍表达式. 事实上，只有找到了普遍表达式之后，才算完全确定了数列 $\{f(n)\}$ 的结构.

为求解(2.6)，不妨简记 $a_n=f(n)$，此处 a_0 与 a_1 为已知数值. 于是(2.6)式可改记为

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}-\beta a_n=0 \quad (n=0,\ 1,\ \cdots),$$

这等价于下列方程组:

$$a_k-\alpha a_{k-1}-\beta a_{k-2}=c_k \quad (k=2,\ 3,\ \cdots), \tag{2.7}$$

其中 $c_k=0$($k\geqslant 2$ 时); 而 c_0, c_1 之值可以规定为

$$c_0=a_0, \quad c_1=a_1-\alpha a_0. \tag{2.8}$$

这样一来, 即可将 (2.7) 式理解为一种特殊的卷积 (Cauchy 乘积)表达式. 试以此与本章 §2 中规定的幂级数乘法运算作比较, 便自然想到应引进发生函数

$$A(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k, \quad B(t)=1-\alpha t-\beta t^2.$$

从而由 (2.7) 式得知

$$A(t)\cdot B(t)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k t^k=a_0+(a_1-\alpha a_0)t, \tag{2.9}$$

既然 $B(t)$ 中的常数项异于 0, 故乘法逆元存在. 于是由 (2.9) 得出

$$A(t)=(a_0+(a_1-\alpha a_0)t)/(1-\alpha t-\beta t^2), \tag{2.9$'$}$$

显然只须将此有理函数展成 t 的幂级数, 即可定出 a_k 来.

令 $1-\alpha t-\beta t^2=(1-r_1t)(1-r_2t)$, 则

$$r_1+r_2=\alpha, \quad r_1\cdot r_2=-\beta,$$

由此解得

$$r_1=\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+4\beta}), \quad r_2=\frac{1}{2}(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2+4\beta}), \tag{2.10}$$

显然 (2.9)$'$ 的右端分式可表为分项分式

$$A(t)=\frac{1}{r_1-r_2}\left(\frac{a_1-\alpha a_0+r_1a_0}{1-r_1t}-\frac{a_1-\alpha a_0+r_2a_0}{1-r_2t}\right),$$

将此式右端展成 t 的幂级数, 易见 t^n 的系数为

$$a_n=f(n)=(a_1-\alpha a_0)\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}+a_0\frac{r_1^{n+1}-r_2^{n+1}}{r_1-r_2}, \tag{2.11}$$

这就是方程 (2.6) 的一般解, 其中 r_1, r_2 按 (2.10) 式计算.

例 在第一章中已经讲过的 Fibonacci 数列

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

它的构造规则是：从第三个数开始，每个数都是由前两个数相加得到．因此如将此数列记为 $F_0, F_1, F_2, \cdots, F_n, \cdots$ 时，则数列满足的条件可表示为递归方程

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots),$$

而初始值条件为 $F_0 = F_1 = 1$．

将上述方程与一般方程(2.6)相比较，可知 $\alpha=\beta=1$，且 $a_0=a_1=1$．因此由(2.10)可得

$$r_1=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad r_2=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),$$

以此代入公式(2.11)便得到 F_n 的一般表达式

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right], \qquad (2.12)$$

这当然与前章中的结果(1.22)式完全一致．

对于线性递归方程中出现多于三项的情形(当然初始值已随之增加)可以作完全类似的处理．原则上讲，都可以通过递推方程和初始值来解出发生函数，而后由展开发生函数来确定所求的递归数列，此处不再赘述．

§5　发生函数对枚举问题的应用

组合数学中有各种各样的枚举问题(enumeration problems)及其相应的计数问题(counting problems)．在前章中也已略窥一斑．本节将就几种基本重要的枚举问题，分别揭示它们各自相应的发生函数．这些适用于处理枚举问题的发生函数，通常称为"枚举发生函数"．

先举一简单例子．令 x_1, x_2, x_3 表示三个相异事物，则如下的代数乘积

$$(1+x_1t)(1+x_2t)(1+x_3t)$$

按 t 的幂次展开后的形式为

$$1+(x_1+x_2+x_3)t+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)t^2+(x_1x_2x_3)t^3,$$

或者简记为

$$1+S_1t+S_2t^2+S_3t^3,$$

这里的 S_1, S_2, S_3 就是三个变元 x_1, x_2, x_3 的一次、二次、三次对称函数(即代数中的初等对称函数).

因为 $S_r(r=1, 2, 3)$ 是由 3 个相异元中每次取 r 个相加而成,故其项数即等于$\binom{3}{r}$. 一般说来,如果考虑

$$\prod_{j=1}^{n}(1+x_jt)=1+\sum_{r=1}^{n}S_r(x_1, x_2, \cdots, x_n)t^r,$$

则于 $x_j=1(j=1, \cdots, n)$时立得

$$(1+t)^n=1+\sum_{r=1}^{n}S_r(1, 1, \cdots, 1)t^r=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{0}t^r.$$

既然$(1+t)^n$ 的展开式能够联系着 t^r 给出 n 个相异事物中每次取 r 个的组合数(作为其系数), 所以$(1+t)^n$ 也就称为 n 个相异事物的组合枚举子.

当然, 如上所述的是个最简单的枚举子. 较复杂的情况是: 假设有 n 种相异事物, 每种事物多至无限, 且容许在每种事物中重复选取, 则关于组合的枚举子将由下列乘积给出:

$$(1+t+t^2+\cdots)^n.$$

这是十分清楚的, 我们总是把同一个括号内的项代表同一种事物, t^1 表示事物出现一次(或被取一次), t^2 表示同一种事物出现两次, 余类推. 至于 $1=t^0$ 即表示该种事物未出现或未被取到. 下面举几个例子来说明这类枚举子的用处.

例 1 假设要从 n 种相异事物中任意选取 r 个事物, 并假定每种事物允许重复选取(即并不要求 r 个事物彼此相

异），则一切方法数显然即等于

$$(1+t+t^2+\cdots)^n=(1-t)^{-n}$$

展开式中 t^r 的系数。

因为

$$(1-t)^{-n}=\sum_0^\infty \frac{(-n)_r}{r!}(-t)^r=\sum_{n=0}^\infty \binom{n+r-1}{r} t^r,$$

所以任取 r 个的一切组合方法数即等于 $\binom{n+r-1}{r}$。

例 2 在上面的例子中假定 $r\geqslant n$，并设每种事物至少取一个，则组合枚举发生函数显然是

$$(t+t^2+t^3+\cdots)^n,$$

由于

$$(t+t^2+\cdots)^n=t^n(1-t)^{-n}=t^n\sum_0^\infty \binom{n+r-1}{r} t^r$$

$$=\sum_{r=n}^\infty \binom{r-1}{r-n} t^r=\sum_{r=n}^\infty \binom{r-1}{n-1} t^r,$$

因此所求的组合方法数即等于 $\binom{r-1}{n-1}$。

例 3 假设有 m 种事物，每种事物各有 s 个，问任取 r 个的组合方法数有多少？（此种方法数可以记为 $C(s^m, r)$）。

所谓任取 r 个，意思是对每种事物可以重复选取（当然至多只能重复 s 次），也可以一个不取，所以枚举发生函数显然是

$$(1+t+t^2+\cdots+t^s)^m,$$

因此问题变为：怎样找出上述发生函数展开式中 t^r 的系数？

显然我们有

$$(1+t+t^2+\cdots+t^s)^m=(1-t^{s+1})^m(1-t)^{-m}$$

$$=\left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}t^{k(s+1)}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\binom{m+j-1}{m-1}t^j\right),$$

考虑上述乘积中出现 $t^{k(s+1)}t^j=t^r$ 这样的项，可见 j 必须合于条件 $j=r-k(s+1)$. 因此乘积可表成

$$\sum_{r=0}^{\infty}t^r\left[\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+r-k(s+1)-1}{m-1}\right],$$

这就表明任取 r 个的组合方法数是

$$C(s^m,\ r)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{m+r-k(s+1)-1}{r-k(s+1)},\quad (2.13)$$

注意，(2.13)式的右端已无法化简.

例 4　设 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m$ 是一组给定的正整数，n 是任意正整数. 令 A_n 表示下列不定方程式(又称 Diophantos 方程)

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_mx_m=n$$

的非负整数解组 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)$ 的个数. 求 A_n 的枚举发生函数.

我们可以将上述问题改述成这样一个组合问题：假定有 m 种事物，今要任意选取 n 个事物，但规定对第一种事物取出的个数必须是 a_1 的倍数(也可以是 0 倍，即一个也不取)，对第二种事物须取 a_2 的倍数，余类推. 因此取出 n 个事物的组合方法数的枚举发生函数应该是如下形式的连乘积

$$\left(1+\sum_{x_1=1}^{\infty}t^{a_1x_1}\right)\left(1+\sum_{x_2=1}^{\infty}t^{a_2x_2}\right)\cdots\left(1+\sum_{x_m=1}^{\infty}t^{a_mx_m}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1-t^{a_1}}\right)\left(\frac{1}{1-t^{a_2}}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-t^{a_m}}\right).$$

简记

$$F(t)=\frac{1}{(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})\cdots(1-t^{a_m})}.\qquad (2.14)$$

自然，$F(t)$也就是 A_n 的发生函数．按 Taylor 展开式，还可将 A_n 表示成 $A_n=F^{(n)}(0)/n!$．

[注] 这个例子中的整数解组问题又称为"货币兑换问题"．可以设想有 m 种货币，它们的票面价值各为 a_1 个单位、a_2 个单位、…、a_m 个单位．于是 A_n 即代表把 n 个单位兑换成各种货币的一切组合方法数．

下面我们再介绍"邮票排列问题"与"天平问题"的枚举发生函数．

例 5 设寄信需要邮票 n 分，今用 1 分、2 分、3 分、4 分四种邮票粘贴在一系列的位置上，不同的排列方式算作不同的方法．令 B_n 表示不同的方法数．试求 B_n 的枚举发生函数．

这问题相当于：以 1, 2, 3, 4 四数作项相加，以求表出任一正整数 n 的一切方法数 B_n．如果规定用 k 个项表出 n，则方法数显然等于$(t+t^2+t^3+t^4)^k$展开式中 t^n 的系数．因此关于一切方法总数 B_n 的发生函数是

$$1+\sum_{k=1}^{\infty}(t+t^2+t^3+t^4)^k=\frac{1}{1-t-t^2-t^3-t^4}.$$

由于各项相加时首项可以是 1, 2, 3 或 4，所以可看出有递推公式 $B_n=B_{n-1}+B_{n-2}+B_{n-3}+B_{n-4}$．利用此关系可以逐步求出 B_n，例如 $B_8=108$．

推广上述问题，考虑以 $a_1, a_2, \cdots, a_k$ 诸正整数作项相加（一数可连用多次）．又以 B_n 表示总和为 n 的一切不同加法方式的总数，则 B_n 的发生函数为

$$G\{B_n\}=\frac{1}{1-t^{a_1}-t^{a_2}-\cdots-t^{a_k}}, \qquad (2.15)$$

这里规定 $B_0=1$．

例 6 设有 k 个砝码，其重量分别为 a_1 克，a_2 克，…，a_k 克（均为整数）。今要在天平上衡量重为 n 克之物。问有多少种不同方式？

对此题应区分两种情形：(i) 若砝码规定只加在天平的一端，则不同方式总数 C_n 的发生函数显然即

$$G\{C_n\}=(1+t^{a_1})(1+t^{a_2})\cdots(1+t^{a_k}).$$

(ii) 若砝码允许加在天平的两端，则所求方式总数 D_n 的发生函数便是

$$G\{D_n\}$$
$$=(t^{-a_1}+1+t^{a_1})(t^{-a_2}+1+t^{a_2})\cdots(t^{-a_k}+1+t^{a_k}).$$

这里我们不妨规定加在右端的砝码重量为正，则加在左端的砝码起抵消作用，故在重量累计中须作为负数计算。这就是为什么必须引进 t^{-a_1}，t^{-a_2}，…，t^{-a_k} 诸项的理由。

这里我们来补充一个 Hardy 提供的有趣例子，它表明某些特殊的 Diophantos 方程的整数解组的个数，可以有十分简单的计数表达式。

例 7 令 $\langle\alpha\rangle$ 表示正实数 α 的最近整数（其中 2α 并非一整数），即 $\langle\alpha\rangle$ 是这样的非负整数使得 $|\langle\alpha\rangle-\alpha|<\frac{1}{2}$，则下列 Diophantos 方程

$$x+2y+3z=n$$

的非负整数解组的个数即等于 $\left\langle\frac{1}{12}(n+3)^2\right\rangle$。

令 $\omega=e^{2\pi i/3}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$ $(i=\sqrt{-1})$，表示单位立方虚根（即方程 $x^3=1$ 的一个复数根），则根据例 4 中的 (2.14) 式可知本例中的发生函数可表为

$$G\{A_n\}=\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$$

$$=\frac{1}{(1-t)^3(1+t)(1-\omega t)(1-\omega^2 t)}$$

$$=\frac{1}{6(1-t)^3}+\frac{1}{4(1-t)^2}+\frac{1}{72(1-t)}$$

$$+\frac{1}{8(1+t)}+\frac{1}{9(1-\omega t)}+\frac{1}{9(1-\omega^2 t)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{12}-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right)t^n,$$

上式中 t^n 项的系数就是所求解组个数 A_n. 由于

$$\left|-\frac{7}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{2}{9}\cos\frac{2n\pi}{3}\right|\leqslant\frac{32}{72}<\frac{1}{2},$$

且由于 A_n 必为一整数, 故可见 $A_n=\langle(n+3)^2/12\rangle$.

例如当 $n=7$ 时, $A_n=\langle(7+3)^2/12\rangle=8$, 我们就知道方程

$$x+2y+3z=7$$

一定有 8 组非负整数解. 事实上这些解组是: (0, 2, 1), (1, 3, 0), (1, 0, 2), (2, 1, 1), (3, 2, 0), (4, 0, 1), (5, 1, 0), (7, 0, 0). 除此而外再没有其它的非负整数解了.

下面我们专来讨论有关排列问题的枚举发生函数. 这里将看出指数型发生函数的引入是完全必要的.

先从最简单的例子说起, 对于 n 个相异事物而言, 已知有枚举发生函数

$$(1+t)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n)_r\frac{t^r}{r!},$$

这表明从 n 个中任取 r 个作排列的方法数 $(n)_r$ 恰好是 $t^r/r!$ 项的系数. 由此启发, 可以想见当一事物能被选取 0 次, 1 次, 2 次, …, k 次时 (或者同一种事物包含 k 个时), 则关于

它的(作为排列的)枚举子应取如下形式:

$$1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!},$$

特别,如果重复次数不受限制时,则枚举子应取指数函数

$$e^t=\sum_0^\infty t^k/k!.$$

例 8 设有 n 种事物,诸事物可重复选取,则任取 r 个的排列方法数有如下的发生函数

$$\left(1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}+\cdots\right)^n=e^{nt}=\sum_{r=0}^\infty n^r\frac{t^r}{r!},$$

这表明在允许重复任取一物的情形下,任取 r 个的排列数为 n^r.

推广例 8 的思想方法,可写出如下的

例 9 设有 n 种事物,对每种事物允许选取的次数(或个数)都有规定. 例如,对第 k 种事物可被选取的次数(或个数)规定为 $\lambda_0(k)$, $\lambda_1(k)$, $\cdots$ 次 ($k=1, 2, \cdots, n$), 则任取 r 个的排列方法数就有如下形式的枚举发生函数

$$\prod_{k=1}^n\left(\frac{t^{\lambda_0(k)}}{\lambda_0(k)!}+\frac{t^{\lambda_1(k)}}{\lambda_1(k)!}+\cdots\right)=\sum_r A_r\frac{t^r}{r!},$$

这里展开式中的 A_r 即代表取 r 个作排列的全部方法数.

事实上,假如对 n 种相异事物分别选取的个数为 $\lambda(1)$, $\lambda(2)$, $\cdots$, $\lambda(n)$, 而总数为 $\lambda(1)+\lambda(2)+\cdots+\lambda(n)=r$, 则排列方法数即等于

$$\frac{r!}{\lambda(1)!\lambda(2)!\cdots\lambda(n)!},$$

显然这就是枚举子连乘积中这样一项

$$\left(\frac{t^{\lambda(1)}}{\lambda(1)!}\right)\left(\frac{t^{\lambda(2)}}{\lambda(2)!}\right)\cdots\left(\frac{t^{\lambda(n)}}{\lambda(n)!}\right)$$

中的 $t^r/r!$ 的系数，而 A_r 就是所有这类项的系数之和。

为叙述本节的最后一个例子，这里简略地介绍一下有限差计算中常用的移位算子 E 与差分算子 Δ。这些算子的定义是：

$$
\begin{aligned}
&Ef(n)=f(n+1),\\
&\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)=(E-1)f(n),\\
&E^0=\Delta^0=1\text{（恒等算子）},\\
&E^{n+1}=EE^n,\ \Delta^{n+1}=\Delta\Delta^n\quad(n=1,\ 2,\ \cdots).
\end{aligned}
$$

不难验明，由这些算子作成的代数多项式（所谓算子多项式，其系数可规定属于实数域或复数域），其全体对加法与乘法而言构成算子交换环．因此对加、减、乘运算可以畅行无阻．

在有限差分学中一类极为有用的数叫做"高阶零差"．设 n，r 为任意正整数，则用 Δ^n0^r 表示 x^r 在 $x=0$ 处的 n 阶差分，其定义为 $\Delta^n0^r=\Delta^nx^r|_{x=0}$．由此定义可得

$$
\Delta^n0^r=(E-1)^nx^r|_{x=0}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^jE^{n-j}0^r
$$

$$
=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-j)^r=\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^r.
$$

此外，读者可以自行验证 $\Delta^n0^n=n!$，$\Delta^n0^r=0\ (n>r)$．

例 10 设有 n 种事物，今任取 r 个事物作排列，规定每种事物至少要取一个（自然 $r\geqslant n$），则一切排列数 A_r 的发生函数应该是（参考例 9）

$$
G\{A_r\}\equiv\left(t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)^n=(e^t-1)^n.
$$

将上式右端展开，则得

$$(e^t-1)^n=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j e^{(n-j)t}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)^r=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^r}{r!}\Delta^n 0^r,$$

这表明所要求的排列数 A_r 正好等于高次零差 $\Delta^n 0^r$.

高次零差数今后还将多次碰到. 特别, 容易立即写出 $\Delta 0^r=1^r$, $\Delta^2 0^r=2^r-2$, $\Delta^3 0^r=3^r-3\cdot 2^r+3$ 等等.

最后, 我们注意例 9 中的数

$$\frac{r!}{\lambda(1)!\cdots\lambda(n)!}$$

$$=\binom{r}{\lambda(1)}\binom{r-\lambda(1)}{\lambda(2)}\cdots\binom{r-\lambda(1)-\cdots-\lambda(n-1)}{\lambda(n)}.$$

这表明左端的排列数可以解释为 r 个相异事物按 $\lambda(1)$, $\lambda(2)$, $\cdots$, $\lambda(n)$ 分别配置到 n 个相异地址(单元)的一切方法数, 因此例 9 中的 A_r 即等于 r 个相异事物配置到 n 个不同地址的一切分布方法数, 但规定第 k 号地址配置的个数限于

$$\lambda_0(k),\ \lambda_1(k),\ \lambda_2(k),\ \cdots\quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

既然对上述一般条件下的 A_r 可以赋予新的意义, 所以例 10 中的 $A_r=\Delta^n 0^r$ 又可以解释为 **r 个相异事物分布到 n 个不同地址, 而每一地址至少被分配一物的一切分配方法数.** 正因为 $\Delta^n 0^r$ 有这样意义, 所以此数在近代数理生物学中也有其应用.

§ 6 指数型发生函数与 Blissard 演算

指数型发生函数不仅对研究排列问题是必要的, 而且在计算概率统计中的矩量时也是极有用的工具. 这里我们专来

讨论指数型发生函数的运算性质，特别要介绍 Blissard 形式演算法则.

令数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$，$\{c_k\}$ 相应的指数型发生函数分别记作

$$A(t)=\sum_0^\infty \frac{a_k t^k}{k!},\quad B(t)=\sum_0^\infty \frac{b_k t^k}{k!},\quad C(t)=\sum_0^\infty \frac{c_k t^k}{k!},$$

则当 $A(t)\cdot B(t)=C(t)$ 时，由比较 t^k 项系数可得下列等式：

$$c_k=a_k b_0+\binom{k}{1}a_{k-1}b_1+\cdots+\binom{k}{j}a_{k-j}b_j+\cdots+a_0 b_k,\quad (2.16)$$

这表明它和普通发生函数的数列卷积形式有所不同. 但正因为其中出现了二项系数，且与二项展开式十分相似，便使人想到可将它按二项展开公式这样的形式来缩记. 例如，我们可以纯粹作为形式符号来表记

$$c_k=(a+b)^k,\quad a^k\equiv a_k,\quad b^k\equiv b_k\quad (k=0,\ 1,\ \cdots).$$

这就是说，在演算过程中可把足标移到指数地位来演算，但演算完毕之后，对最终结果仍须让指数返回足标位置. 这种形式算法即称为 Blissard 演算或"哑演算"(umbral calculus).

上述哑演算的合理性本质上是基于指数型发生函数在作乘法运算与求导等演算时，能与哑演算法则一一对应起来，并使最终结果具有一致性. 具体说来，按哑演算规定法则，可简记

$$A(t)=\sum_0^\infty \frac{a^k t^k}{k!}=e^{at},\quad B(t)=e^{bt},\quad C(t)=e^{ct},$$

其中 $a^k\equiv a_k$，$b^k\equiv b_k$，$c^k\equiv c_k$. 又由形式演算得

$$A(t)B(t)=e^{(a+b)t}=e^{ct},\quad (a+b)^k\equiv c^k\equiv c_k.$$

其中 c_k 恰好可由 $(a+b)^k$ 进行哑演算而算出. 这一段无非表明按哑演算进行乘法运算时最终结果是一定正确的.

对 $A(t)$ 进行求导运算，可得

$$DA(t)=De^{at}=ae^{at}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}t^n}{n!},$$

这表明哑演算仍继续得出正确结果．由上所论，至少已能看出，哑演算应用于形式指函数的乘法与求导，总是行之有效的．当然，乘法与求导运算可以反复进行．例如，若以微分算子 $D=d/dt$ 对函数 $A(t)=e^{at}$ 作用 n 次，则可得

$$D^nA(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+n}t^k/k!=a^ne^{at},\quad a^k\equiv a_k.$$

由于(2.16)式可以推广到多元卷积的情形，所以相应地还有如下形式的 Blissard 算法：

$$c_0=\alpha_0\beta_0\gamma_0\cdots,$$

$$c_n=(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)^n=\sum\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\alpha_p\cdot\beta_q\cdot\gamma_r\cdots.$$

这里完全按照多项式展开公式展开(其中 $p+q+r+\cdots=n$)，并按哑演算规定 $\alpha^n\equiv\alpha_n$，$\beta^n\equiv\beta_n$，$\gamma^n\equiv\gamma_n$ 等等．

但是必须注意的是，在作乘法卷积演算时，碰到相同的数列务必当作相异的数列来演算．例如，如果 $a_n=b_n(n=0,1,2,\cdots)$，则按哑演算规则应得

$$(a+b)^n=(a+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_{n-k}\cdot a_k,\qquad(2.17)$$

但如果盲目地写成

$$(a+a)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}a^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^n=2^na_n,$$

那就大错特错了！其所以错误显然是因为忘记了 $a^{n-k}\equiv a_{n-k}$，$a^k\equiv a_k$，而作为同一数列的足标自然是不能按指数律来加以处理的．

完全平行于第二节中表述的思想方法，可以引进单位发生函数 $1+0t+0t^2/2!+\cdots$ 与零元素 $0+0t+0t^2/2!+\cdots$．这

样一来，同样可以验明，对加法与乘法运算(参考(2.16))而言，全体指数型发生函数也构成一个交换环．在这样一个Blissard的代数中，还可引进乘法逆元素．假定

$$A(t)=\sum_0^\infty \frac{a^k t^k}{k!}=e^{at},\ a^k\equiv a_k,\ a_0\neq 0,$$

则 $A(t)$ 的逆元 $A'(t)$ 便是满足下列条件：

$$A(t)A'(t)=e^{at}\cdot e^{a't}=e^{(a+a')t}=1\quad(\text{单位元})$$

的指数型发生函数 $A'(t)=e^{a't}$，$(a')^k\equiv a'_k$．

上述条件相当于下列方程组：

$$\begin{cases}a_0a'_0=1,\\(a+a')^k=0,\ a^k\equiv a_k,\ (a')^k\equiv a'_k,\ k=1,\ 2,\ \cdots.\end{cases}$$

由此可解得

$$a'_0=1/a_0,\qquad a'_2=-a_2/a_0^2+2a_1^2/a_0^3,$$

$$a'_1=-a_1/a_0^2,\qquad a'_3=-a_3/a_0^2+6a_2a_1/a_0^3-6a_1^3/a_0^4.$$

关于 a'_n 的一般表达式须用到 Bell 多项式(见本章第 7 节例 2)．

下面我们举几个用到哑演算法则的例子：

例 1　令 λ 表示一个固定实数，今取

$$A(t)=e^{at},\ a^n\equiv a_n;\ B(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{\lambda^n t^n}{n!}=e^{\lambda t},$$

并记

$$A(t)B(t)=C(t)=e^{ct},\quad c^n\equiv c_n,\tag{2.18}$$

则由(2.16)可知

$$c_n=(a+\lambda)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}a_{n-k}\lambda^k,\tag{2.19}$$

又因 $B(t)$ 之逆为 $B(-t)=e^{-\lambda t}$，故由(2.18)又得

$$A(t)=C(t)B(-t)=e^{(c-\lambda)t},\ c^n\equiv c_n.$$

从而

$$a_n=(c-\lambda)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_{n-k}(-\lambda)^k, \tag{2.20}$$

这表明(2.19)、(2.20)为数列 $\{a_n\}$ 与 $\{c_n\}$ 间的一对互反关系，又称“**对偶关系**”(dual relations)。

例 2 取 $b_k=k!$，则 $\{b_k\}$ 的指数型发生函数为

$$B(t)=e^{bt}=\sum_0^{\infty}t^k=(1-t)^{-1},$$

其逆为 $B'(t)=1-t$. 由此反复应用(2.16)可知成立如下的对偶关系：

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!a_k, \tag{2.21}$$

$$a_n=c_n-nc_{n-1}, \tag{2.22}$$

这对关系式的等价性是容易直接验明的.

例 3 古典的 Bernoulli 数 $B_n(n=0, 1, 2, \cdots)$可由下列发生函数产生：

$$e^{Bt}=\frac{t}{e^t-1}, \quad B^n\equiv B_n. \tag{2.23}$$

这等价于下列方程：

$$e^{Bt}(e^t-1)=e^{(B+1)t}-e^{Bt}=t.$$

比较上式两端的系数可得

$$(B+1)^n-B_n=\delta_{n1}, \quad B^n\equiv B_n, \tag{2.24}$$

其中 δ_{n1} 为 Kronecker 记号，其一般定义是：当$n=m$时 $\delta_{nm}=1$；当 $n\neq m$ 时 $\delta_{nm}=0$.

从(2.24)可知 $B_1+B_0-B_1=1$，从而 $B_0=1$. 又当 $n\geqslant 2$ 时，

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

也即

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_k=0 \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots),$$

这可以用作递推公式逐步计算各个 B_n, 例如易得

$$B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6},\ B_3=0,\ B_4=-\frac{1}{30},\ \text{等等}.$$

特别, 除 B_1 是例外情形外, 可证一切奇数足标的 B_{2k+1} 都是零. 事实上, 这是因为

$$\frac{1}{2}\left(e^{Bt}-e^{B(-t)}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{e^{-t}-1}\right)=-\frac{1}{2}t.$$

例 4 从第 5 节的例 10 已知

$$(e^t-1)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Delta^k0^n,$$

于是根据 Bernoulli 数的发生函数可得

$$e^{Bt}=\frac{t}{e^t-1}=\frac{\log(1+e^t-1)}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}(e^t-1)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\Delta^k0^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\Delta^k0^n.$$

这表明 B_n 可用高次零差的线性组合表示出来, 即

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\Delta^k0^k}{k+1}. \tag{2.25}$$

§7 Bell 多项式

在上一节论述 Blissard 演算时, 我们已经提及 Bell 多项式, 实际上这类多项式在不少组合分析与统计学问题中都会出现, 所以 J. Riordan 在他的组合分析著作中曾经作过较多讨论, 但在本节只准备作一概略介绍.

从复合函数的高价导数计算问题中, 可以很自然地导出 Bell 多项式. 考虑复合函数

$$A(t)=f[g(t)], \tag{2.26}$$

使用求导算子 $D_t=d/dt$, $D_u=d/du$, 简记

$$D_t^n A(t)=A_n,\ [D_u^n f(u)]_{u=g(t)}=f_n,\ D_t^n g(t)=g_n.$$

于是对(2.26)中的函数相继求导,可得

$$A_1=f_1g_1,$$
$$A_2=f_1g_2+f_2g_1^2,$$
$$A_3=f_1g_3+3f_2g_2g_1+f_3g_1^3.$$

$A(t)$的 n 阶导数的一般形式可以写成

$$A_n=f_1A_{n1}+f_2A_{n2}+\cdots+f_nA_{nn}$$
$$=\sum_{k=1}^{n} f_kA_{nk}(g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n). \tag{2.27}$$

注意上式中出现的系数 A_{nk} 只依赖于各阶导数 $g_1, g_2, \cdots$, 而与诸 f_k 无关. 正是因为这一点, 所以不妨选取较简单的函数 $f(u)$ 以便去确定 A_{nk} 的形式. 看来特别方便的一个选择是取 $f(u)=e^{au}$, 其中 a 是一个固定常数. 这样一来, 我们有

$$f_k=a^ke^{ag},\ g=g(t),$$
$$e^{-ag}D_t^ne^{ag}=\sum_k A_{nk}(g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n)a^k$$
$$=A_n(a;\ g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_n), \tag{2.28}$$

上式右端表明 A_{nk} 正好是 a^k 的系数.

由于 $e^{-ag}=1+\sum(-ag(t))^k/k!$, 故知 $A_{nk}(g_1,\ \cdots,\ g_n)$ 只能包含于 $D_t^ne^{ag}$ 的展开式中. 现在我们来计算

$$D_t^ne^{ag}=\left(\frac{d}{dt}\right)^n\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a^k(g(t))^k}{k!}\right], \tag{2.29}$$

问题归结为计算 $D_t^n(g(t))^k$. 这里被微分的函数是 k 个 $g(t)$ 的连乘积, 它的高阶导数可用类似于多项式展开定理的形式表出. 详细说来即

$$D_t^n(g(t))^k=\sum\frac{n!}{\lambda_1!\lambda_2!\cdots\lambda_k!}g_{\lambda_1}\cdot g_{\lambda_2}\cdots g_{\lambda_k}, \tag{2.30}$$

这里 $g_\lambda = D_t^\lambda g(t)$，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n$ $(\lambda_j \geqslant 0)$. 我们只须考虑 $\lambda_j \geqslant 1$ 的情形，今设在数列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 中有 j_1 个 1；j_2 个 2；…；j_n 个 n $(j_\nu \geqslant 0)$，则 $1j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n$，而(2.30)右端的通项可写成

$$\frac{n!}{(1!)^{j_1}(2!)^{j_2}\cdots(n!)^{j_n}}(g_1)^{j_1}(g_2)^{j_2}\cdots(g_n)^{j_n},$$

其中 $j_1+j_2+\cdots+j_n=k$(这里并未考虑(2.30)右端含有 g 的那些项).

但是对应于一组固定的相同的系数 $n!/(1!)^{j_1}(2!)^{j_2}\cdots\cdot(n!)^{j_n}$ 说来，足标 j_1 个 1，j_2 个 2，…，j_n 个 n 出现在足标数列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 内的顺序排列共有 $k!/j_1!j_2!\cdots j_n!$ 个. 这就是说，上述形式的通项在(2.30)式右端将重复出现 $k!/j_1!\cdots\cdot j_n!$ 回. 因此，这样一种通项可合并写成

$$\frac{k!n!}{j_1!j_2!\cdots j_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{g_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{j_n}.$$

根据(2.28)与(2.29)式可知含 a^k 的一切项之和即等于

$$A_n(a)=\sum\frac{n!a^k}{j_1!j_2!\cdots j_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{g_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{j_n}, \quad (2.31)$$

此处右端的和式取遍所有满足条件

$$j_1+j_2+\cdots+j_n=k; \quad 1j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n$$
$$(k=1, 2, \cdots, n)$$

的非负整数组 $(j_1, j_2, \cdots, j_n)$ 对应的项.

既然(2.31)式右端 a^k 的系数就是 $A_{nk}(g_1, g_2, \cdots, g_n)$，所以比较(2.28)与(2.27)我们便求得

$$A_n=A_n(f)$$

$$=\sum\frac{n!f_k}{j_1!j_2!\cdots j_n!}\left(\frac{g_1}{1!}\right)^{j_1}\left(\frac{g_2}{2!}\right)^{j_2}\cdots\left(\frac{g_n}{n!}\right)^{j_n}, \quad (2.32)$$

通常把(2.32)式的右端记为 $Y_n(fg_1, fg_2, \cdots, fg_n)$. 这个关于 $g_1, \cdots, g_n$ 的多项式就叫做 Bell 多项式，其中 $\{f_k\}$ 可以是任意数列.

特别，如果 $f_k=[D_u^k f(u)]_{u=g(t)}$，则(2.32)便是关于高阶导数 $A_n=D_t^n(f(g(t)))$ 的普遍公式，即熟知的 Faadi Bruno 公式.

根据(2.32)式容易立即得出前几个 Bell 多项式. 今列举其五，以供参考.

$Y_1=f_1g_1,$

$Y_2=f_1g_2+f_2g_1^2,$

$Y_3=f_1g_3+f_2(3g_2g_1)+f_3g_1^3,$

$Y_4=f_1g_4+f_2(4g_3g_1+3g_2^2)+f_3(6g_2g_1^2)+f_4g_1^4,$

$Y_5=f_1g_5+f_2(5g_4g_1+10g_3g_2)+f_3(10g_3g_1^2+15g_2^2g_1)$

$\quad +f_4(10g_2g_1^3)+f_5g_1^5.$

实际上，这里的前三个多项式已在前面(2.26)式下面提到过.

Bell 多项式在统计数学中很是有用. 下面举一有趣例子.

例 1 统计中有所谓"累积量" (cumulant) 的计算问题. 令 λ_n 表示第 n 个累积量 (特别 $\lambda_0=0$)，其指数型发生函数可记为

$$L(t)=\lambda_1 t+\lambda_2 t^2/2!+\cdots+\lambda_n t^n/n!+\cdots=e^{\lambda t}.$$

又令 $\{m_n\}$ 为一矩量数列，m_n 为第 n 次矩量. 于是由下列关系

$$e^{mt}=e^{L(t)}, \quad m^n=m_n \tag{2.33}$$

确定的数列 $\{\lambda_n\}$ 就叫做累积量数列. 这里出现的计算问题

是：怎样利用已知的 $\{m_n\}$ 去计算各个 λ_n? 又怎样通过 $\{\lambda_n\}$ 去计算各个 m_n?

首先，由(2.33)可知

$$m_n = D_t^n[e^{mt}]_{t=0} = D_t^n[e^{L(t)}]_{t=0}, \quad D^n[L(t)]_{t=0} = \lambda_n.$$

因此，直接应用公式(2.31)或(2.32)，于其中取 $a=1$, $g(t)=L(t)$, $g_k=\lambda_k$, 即可得

$$m_n = A_n(1; \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) = Y_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n). \quad (2.34)$$

现在再来考察多项式(2.34)的逆转问题，即利用 $\{m_n\}$ 来表现各个 λ_n 的问题. 这时先须从(2.33)解出

$$L(t) = \log(e^{mt}), \quad m^n \equiv m_n,$$

由于 $\lambda_n = D_t^n[L(t)]_{t=0}$, 故问题变为计算高阶导数的问题. 于是应用(2.32)式，于其中取 $f(u)=\log u$, $u=g(t)=e^{mt}$, 经过简单计算即得

$$f_k = (-1)^{k-1}(k-1)!, \quad g_k = D^k[e^{mt}]_{t=0} = m_k,$$

从而得到

$$\lambda_n = D_t^n[\log e^{mt}]_{t=0} = Y_n(fm_1, fm_2, \cdots, fm_n), \quad (2.35)$$

这样便解决了两串数列互相表示的问题.

在第6节中曾论及 Blissard 代数演算中的乘法求逆问题，其一般结论包含在下述例2中.

例2 设 $\{a_n\}$ 与 $\{a'_n\}$ 为两组数列，其中 $a_0 \neq 0$, 使得

$$e^{at} \cdot e^{a't} = 1, \quad a^n \equiv a_n, \quad (a')^n = a'_n.$$

那末 a'_n 可用 Bell 多项式表示如下：

$$a'_n = Y_n(fa_1, fa_2, \cdots, fa_n), \quad f_k = (-1)^k k! a_0^{-k-1}. \quad (2.36)$$

令 $f(u)=u^{-1}$, $u=g(t)=e^{at}$, $a^n \equiv a_n$, 则 $e^{a't}=f(g(t))$.

于是 $\quad a'_n = D_t^n[e^{a't}]_{t=0} = D_t^n[f(g(t))]_{t=0}, \quad (a')^n \equiv a'_n.$

故应用(2.32)可以证得(2.36)式. (细节请读者自行验证.)

从 Riordan 的著作中，读者还可以找到运用 Bell 多项式进行计算的其它例子.

§8 两类 Stirling 数

本节将概述两类 Stirling 数的一些基本性质. 如所知阶乘函数$(t)_n$在组合分析与有限差分学中的地位和幂级数$t^n(n=0, 1, 2, \cdots)$在数学分析中的地位具有同样的基本重要性. 因为$\{(t)_n\}$与$\{t^n\}$是两类最常用的基底函数，而 Stirling 数正好是这两套基底之间的变换系数，所以 Stirling 数也就理所当然地经常出现在许多具体计算之中. Ch. Jordan 在他所著《有限差分学》一书中，曾特别强调了 Stirling 数的重要性，并用很大篇幅专辟一章论述这两类数的种种性质与应用.

令 t 表示任意实数或实变量，则一般的阶乘函数的定义为$(t)_0=1$, $(t)_n=t(t-1)\cdots(t-n+1)$ $(n\geqslant1)$. 我们分别用$S_1(n, k)$与$S_2(n, k)$表示第一类与第二类 Stirling 数，它们的定义如下：

$$(t)_0=t^0=S_1(0, 0)=S_2(0, 0)=1,$$

$$(t)_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n, k)t^k \quad (n>0), \tag{2.37}$$

$$t^n=\sum_{k=0}^{n}S_2(n, k)(t)_k \quad (n>0). \tag{2.38}$$

上列二式表明$(t)_n$与t^n分别为$S_1(n, k)$与$S_2(n, k)$的发生函数，但后者是以$(t)_k$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$为基底的展开式.

注意$(t)_{n+1}=(t)_n\cdot(t-n)$. 故由(2.37)可得

$$\sum_{k=0}^{n+1}S_1(n+1, k)t^k=\sum_{k=0}^{n}S_1(n, k)t^{k+1}-n\sum_{k=0}^{n}S_1(n, k)t^k.$$

比较等式两边 t^k 项的系数，便可导出如下的递推关系：

$$S_1(n+1,\ k)=S_1(n,\ k-1)-nS_1(n,\ k). \quad (2.39)$$

再注意 $(t)_{k+1}=t(t-1)\cdots(t-k)=t(t)_k-k(t)_k$，又按 (2.38) 可得

$$t^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}S_2(n+1,\ k)(t)_k=t\sum_{k=0}^{n}S_2(n,\ k)(t)_k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,\ k)[(t)_{k+1}+k(t)_k].$$

从而又可导出下述递推关系：

$$S_2(n+1,\ k)=S_2(n,\ k-1)+kS_2(n,\ k). \quad (2.40)$$

根据定义等式 (2.37), (2.38) 不难看出，只有当 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ n>0$ 时两类 Stirling 数才不为 0. 因此只须从已知的初始值条件

$$S_1(2,\ 2)=1,\quad S_1(n,\ 1)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$S_2(2,\ 2)=1,\quad S_2(n,\ 1)=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

出发，累次利用递归关系(2.39)与(2.40)即可逐步造出两类数的数值表.

表 1 $S_1(n,\ k)$

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	−1	1				
3	2	−3	1			
4	−6	11	−6	1		
5	24	−50	35	−10	1	
6	−120	274	−225	85	−15	1

表2　$S_2(n, k)$

n \ k	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	3	1			
4	1	7	6	1		
5	1	15	25	10	1	
6	1	31	90	65	15	1

由于 Stirling 数对统计计算也很有用，所以近代统计数学家已经为它们造出很大的数值表．

应用移位算子与差分算子可算出

$$t^n = E^t 0^n = (1+\Delta)^t 0^n = \sum_k \binom{t}{k} \Delta^k 0^n = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k 0^n}{k!} (t)_k,$$

此式两端都是 t 的 n 次多项式，所以实际上它是一个 t 的代数恒等式，以此与(2.38)相比较，便立即看出

$$S_2(n, k) = \frac{1}{k!} \Delta^k 0^n, \tag{2.41}$$

这表明第二类 Stirling 数与高阶零差只差一常数因子．又用第五节中述及的有关高阶零差的显明表达式，还可将 $S_2(n, k)$ 表示为

$$S_2(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n, \tag{2.42}$$

但关于 $S_1(n, k)$ 却不存在这样简明的表示式．

如果利用关系式 (2.38) 代入 (2.37) 式的右端，则可得

$$(t)_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n,\ k)\sum_{j=0}^{k}S_2(k,\ j)(t)_j$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{k\geq j}^{n}S_1(n,\ k)S_2(k,\ j)\right)(t)_j,$$

注意$(t)_0$, $(t)_1$, $(t)_2$, …, $(t)_n$诸函数线性无关，故比较上式左右两端得知

$$\sum_{k=j}^{n}S_1(n,\ k)S_2(k,\ j)=\delta_{nj},\tag{2.43}$$

又如果用(2.37)代入(2.38)，则同样可得

$$\sum_{k=j}^{n}S_2(n,\ k)S_1(k,\ j)=\delta_{nj},\tag{2.44}$$

上述两式表明两类 Stirling 数之间存在着相互正交关系．正因为这一事实，所以便可导出下述一对互反公式(又称反演公式)：对任意数列$\{a_k\}$, $\{b_k\}$，假如

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n,\ k)b_k,\tag{2.45}$$

则有

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}S_2(n,\ k)a_k.\tag{2.46}$$

反之，如果(2.46)为已知，则又可从而导出(2.45)．总之，(2.45)与(2.46)是一对关于数列变换(线性变换)的等价关系．有时不妨简记作(2.45)⇔(2.46)．

下面我们来寻找 Stirling 数的指数型发生函数．首先，由第五节中的例 10 已知

$$\frac{(e^t-1)^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{\Delta^k0^n}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}S_2(n,\ k),\tag{2.47}$$

显然这就是$S_2(n,\ k)$的发生函数．

为寻求$S_1(n,\ k)$的指数型发生函数，可采用 Blissard 记法

$$e^{at}=\sum_{0}^{\infty}\frac{(at)^k}{k!},\quad a^k\equiv a_k.$$

假如用 $\log(1+u)$ 来代替 t，则有

$$e^{at}=e^{a[\log(1+u)]}=(1+u)^a=\sum_k\binom{a}{k}u^k$$

$$=\sum_k\frac{(a)_k\cdot u^k}{k!}=e^{(a)u},$$

其中 $(a)^k\equiv(a)_k$, $a^n\equiv a_n$. 但由 $S_1(n, k)$的定义知

$$(a)_n=\sum_{k=0}^{n}S_1(n, k)a_k,\quad a^k\equiv a_k.$$

另一方面，可写出

$$e^{a[\log(1+u)]}=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{[\log(1+u)]^k}{k!},\quad a^k\equiv a_k,$$

故有

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{[\log(1+u)]^k}{k!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n\cdot u^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}S_1(n, k)a_k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{u^n}{n!}S_1(n, k),$$

比较左右两端 a_k 的系数，便得出 $S_1(n, k)$的发生函数

$$\frac{[\log(1+t)]^k}{k!}=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{t^n}{n!}S_1(n, k).\qquad(2.48)$$

Stirling 数在有限差分学中应用很广，读者欲知其详，建议参考 Jordan 的著作.

§9 概率统计中常用的发生函数

发生函数方法在统计数学中有着广泛的应用. 其基本思想和前几节中的完全一样，即把概率及各种矩量序列和形式

幂级数对应起来，这样便可以大大简化某些统计量的计算.

假定 x 为离散随机变量，取互斥的仅有可能的数值 u_1, u_2, $\cdots$, u_n，且其相应的概率为 p_1, p_2, $\cdots$, p_n. 则

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

于是，随机变量 x 对原点 $(x=0)$ 的 r 次矩量定义为

$$m_r = \sum_{i=1}^{n} u_i^r \cdot p_i \quad (r=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.49}$$

特别，当 $r=0$, $m_0 = \sum p_i = 1$.

一次矩量 m_1 通常称为概率分布的平均值. 随机变量 x 对平均值的 r 次矩量定义为

$$M_r = \sum_{i=1}^{n} (u_i - m_1)^r p_i \quad (r=1,\ 2,\ \cdots), \tag{2.50}$$

当 $r=0$ 时 $M_0=1$, 而当 $r=1$ 时 $M_1=0$.

平均值有时称为定位参数，因为它是概率分布在数轴上定位的一个度量. 对平均值的矩又称为中心矩，因此对平均值的二次矩也即二次中心矩，即

$$M_2 = \sum_{i=1}^{n} (u_i - m_1)^2 p_i = \sigma^2,$$

这又叫做"色散参数"(parameter of dispersion)，它是反映概率分布离散程度的一个度量，有时也称为"方差"(variance)，其二次方根 σ 称为"标准方差".

还有两个经常用到的矩量，即

$$\sqrt{\beta_1} = M_3/\sigma^3, \quad \beta_2 = M_4/M_2^2 = M_4/\sigma^4.$$

$\sqrt{\beta_1}$ 用以描述概率分布以平均值为中心的偏离的对称程度，β_2 用以描述概率分布的宽窄程度. β_2 大则分布宽，β_2 小则分布窄，也就是分布较尖.

有了上述一些基本知识，我们就可以引进这些矩的发生

函数了．为方便起见往下仍采用Blissard记法与算法．不失一般性，可假定离散变量 x 取值 0, 1, 2, …, n, …, 并设 $m_0=1$．相应地，我们把求和式 $\sum\limits_1^n$ 都改为 $\sum\limits_0^\infty$.

概率序列 $\{p_k\}$ 的普通发生函数为

$$P(t)=p_0+p_1t+p_2t^2+\cdots,$$

相应地，原点矩的指数型发生函数可记为

$$m(t)=e^{mt}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_k t^k}{k!}=P(e^t),\quad m^k\equiv m_k,\qquad (2.51)$$

而中心矩的指数型发生函数为

$$M(t)=e^{Mt}=e^{(m-m_1)t}=e^{-m_1t}P(e^t),\qquad (2.52)$$

这里只须注意 m_n, M_n 的定义

$$m_n=\sum_0^\infty k^n p_k,\quad M^n\equiv M_n=(m-m_1)^n,\quad m^n=m_n,$$

便可立即验明(2.51)与(2.52)。例如，从(2.51)的右端出发，显然有

$$P(e^t)=\sum_j p_j e^{tj}=\sum_j p_j\sum_k (tj)^k/k!$$

$$=\frac{t^k}{k!}\sum_j p_j j^k=\sum_k\frac{m_k t^k}{k!}=e^{mt}=m(t).$$

至于 $M^n=(m-m_1)^n$ 写法的正确性，也可直接验明如下：

$$M_n=\sum_j(u_j-m_1)^n p_j=\sum_k\binom{n}{k}(-m_1)^{n-k}\sum_j u_j^k p_j$$

$$=\sum_k\binom{n}{k}(-m_1)^{n-k}m^k=(m-m_1)^n,\ m^k=m_k.$$

统计学中还用到阶乘矩与二项矩，它们的定义分别为

$$(m)_n=m(m-1)\cdots(m-n+1)$$

$$=\sum_k S_1(n,\ k)m_k=\sum_k(k)_n p_k,\quad m^k=m_k,\qquad (2.53)$$

$$B_n=\frac{(m)_n}{n!}=\sum_k\binom{k}{n}p_k,\quad m^k\equiv m_k,\tag{2.54}$$

于是$(m)_n$的指数型发生函数可写成

$$e^{(m)t}=\sum_k\frac{(m)_k t^k}{k!}=\sum_k\binom{m}{k}t^k=(1+t)^m=e^{m\log(1+t)}$$

$$=P(e^{\log(1+t)})=P(1+t),\quad m^k\equiv m_k,\tag{2.55}$$

又B_n的普通发生函数可记成

$$B(t)=\sum_n B_n t^n=\sum_n\binom{m}{n}t^n=e^{(m)t}=P(1+t),\tag{2.56}$$

从而由(2.51)与(2.56)还可写出

$$m(t)=P(1+e^t-1)=B(e^t-1).\tag{2.57}$$

综上所述,可把三种发生函数间的简单关系列表如下:

函　　数	$P(\cdot)$	$m(\cdot)$	$B(\cdot)$
$P(t)$	t	$\log t$	$t-1$
$m(t)$	e^t	t	e^t-1
$B(t)$	$1+t$	$\log(1+t)$	t

此表隐含有一些有意义的关系式. 例如, 从表的第一行第三列得知$P(t)=B(t-1)$. 比较两边展开式中t^n的系数可得

$$p_n=\sum_k(-1)^k\binom{n+k}{k}B_{n+k}=\sum_k(-1)^k\frac{(m)_{n+k}}{n!k!},\tag{2.58}$$

实际上这是(2.54)式的反演, 它表明概率p_n可通过阶乘矩来计算. 在许多问题中阶乘矩较易确定, 所以象(2.58)这样简单公式也很有用. 又例如, 从表中得知

$$B(t)=m(\log(1+t)),\quad m(t)=B(e^t-1)$$

是一对互反关系. 从前一式中可得

$$B(t)=e^{m\log(1+t)}=\sum_k m_k\frac{(\log(1+t))^k}{k!},\quad m^k\equiv m_k.$$

再者，

$$\begin{aligned}B(t)=P(1+t)=e^{(m)t}&=\sum_n\frac{t^n}{n!}(m)_n\\&=\sum_n\frac{t^n}{n!}\sum_k m_kS_1(n,\ k)\\&=\sum_k m_k\sum_n S_1(n,\ k)\frac{t^n}{n!},\end{aligned}$$

比较两式右端 m_k 的系数便得到 $S_1(n,\ k)$ 的发生函数(参阅(2.48)式)．同理，如从后一关系式 $m(t)=B(e^t-1)$ 出发，最终比较 $(m)_k$ 的系数，便可得到 $S_2(n,\ k)$ 的发生函数．

统计中还有一种重要的发生函数，即关于累积量的指数型发生函数，这在第 7 节例 1 中已经讨论过，兹从略．

§10　级数多重分割求和法

作为普通发生函数的应用，我们来介绍 De Morgan 的级数多重分割求和法．本节内容系取材于 Riordan 的著作(见该书第二章末的若干例、习题)．

组合数学中出现的各种有穷级数，其和常常表现为一串数列．如果能够将该数列对应的发生函数确定出来，则从组合分析观点看，就算解决了问题，因为从发生函数去寻求生成序列，这往往可按一种标准的数学分析手续去完成．

例如，给定下列两个级数：

$$\begin{aligned}a_k=\binom{k}{0}+\binom{k+1}{2}+\cdots+\binom{k+j}{2j}\\+\cdots+\binom{2k}{2k},\quad k\geqslant 0;\end{aligned}$$

$$b_k=\binom{k}{1}+\binom{k+1}{3}+\cdots+\binom{k+j}{2j+1}$$

$$+\cdots+\binom{2k-1}{2k-1},\quad k>0,$$

为求 a_k 与 b_k，则只须找出它们的发生函数 $A(t)$ 与 $B(t)$ 即可．利用 $\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$，由简单的计算不难验明

$$\begin{cases} a_{k+1}=a_k+b_{k+1}, \\ b_{k+1}=a_k+b_k, \end{cases}$$

自此，按 $A(t)=\sum\limits_k a_k t^k$，$B(t)=\sum\limits_k b_k t^k$，其中 $a_0=1$，$b_0=0$，即可导出联立方程组

$$\begin{cases} A(t)=tA(t)+B(t)+1, \\ B(t)=tA(t)+tB(t), \end{cases}$$

解此联立方程便得到

$$A(t)=(1-t)[(1-t)^2-t]^{-1},$$

$$B(t)=t[(1-t)^2-t]^{-1}.$$

又例如，设 $b_0=c_0=c_1=0$，且

$$a_k=\binom{k}{0}+\binom{k+1}{3}+\cdots+\binom{k+j}{3j}+\cdots,\quad k\geqslant 0;$$

$$b_k=\binom{k}{1}+\binom{k+1}{4}+\cdots+\binom{k+j}{3j+1}+\cdots,\quad k>0;$$

$$c_k=\binom{k}{2}+\binom{k+1}{5}+\cdots+\binom{k+j}{3j+2}+\cdots,\quad k>1;$$

显然这些都是有穷级数．仿上例易证明

$$\begin{cases} a_{k+1}=a_k+c_{k+1}, \\ b_{k+1}=a_k+b_k, \\ c_{k+1}=b_k+c_k, \end{cases}$$

由此，相应地可写出三个发生函数 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$之间的关系

$$\begin{cases} A(t)-1=tA(t)+C(t), \\ \quad B(t)=tA(t)+tB(t), \\ \quad C(t)=tB(t)+tC(t), \end{cases}$$

解出此联立方程组便得到三个发生函数

$$A(t)=\sum_k a_k t^k=(1-t)^2[(1-t)^3-t^2]^{-1},$$

$$B(t)=\sum_k b_k t^k=t(1-t)[(1-t)^3-t^2]^{-1},$$

$$C(t)=\sum_k c_k t^k=t^3[(1-t)^3-t^3]^{-1}.$$

上述二例的思想方法，可以推广到一般情形．假定 a, b, c 均为非负整数，而 a, $b<c$．考虑级数

$$a_k=\sum_{j=0}\binom{k+ja}{b+jc}=\binom{k}{b}+\binom{k+a}{b+c}+\binom{k+2a}{b+2c}+\cdots$$

的求和问题．记 $\{a_k\}$ 的发生函数为

$$A(t;a,\ b,\ c)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots,$$

则仿上例列出联立方程后即可求得

$$A(t;\ a,\ b,\ c)=t^b(1-t)^{c-b-1}[(1-t)^c-t^{c-a}]^{-1}$$

$$(a,\ b<c), \tag{2.59}$$

显然上述二例中的结果都是公式(2.59)的特例．

特别，对于 $a=0$ 的情形，可以用直接方法获得如下的显明公式：

$$\binom{k}{b}+\binom{k}{b+c}+\binom{k}{b+2c}+\binom{k}{b+3c}+\cdots$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{c-1}\left(2\cos\frac{j\pi}{c}\right)^k\cos\left(\frac{(k-2b)j\pi}{c}\right)$$
$$(b<c). \qquad (2.60)$$

为验证(2.60)，先证下述简单引理：记 $i=\sqrt{-1}$, $\exp(x)=e^x$，则对任意正整数 c 和 m，我们有

$$\sum_{j=0}^{c-1}\exp(2mj\pi i/c)=\begin{cases}0, & 当\ m\not\equiv 0 \pmod c,\\ c, & 当\ m\equiv 0 \pmod c.\end{cases}$$

事实上，当 $m\equiv 0 \pmod c$ 时，上式左端 $\sum_0^{c-1}1=c$。又当 $m\not\equiv 0 \pmod c$ 时，则 $\exp(2m\pi i/c)\neq 1$，从而

$$\sum_{j=0}^{c-1}\exp\left(\frac{2mj\pi i}{c}\right)=\frac{1-\exp(2m\pi i)}{1-\exp(2m\pi i/c)}=0.$$

令 $\zeta=\exp(2\pi i/c)$（即 ζ 为 1 的 c 次复数根），则可算出

$$\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{c-1}(1+\zeta^j)^k\zeta^{-bj}=\frac{1}{c}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{j=0}^{c-1}\zeta^{\nu j-bj}$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\sum_{j=0}^{c-1}\exp((\nu-b)j2\pi i/c)$$
$$=\frac{1}{c}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\begin{Bmatrix}0, & 当\ \nu-b\not\equiv 0 \pmod c\\ c, & 当\ \nu-b\equiv 0 \pmod c\end{Bmatrix}$$
$$=\sum_{\nu\equiv b \pmod c}\binom{k}{\nu}=\sum_j\binom{k}{b+jc}.$$

因此只须指明上式的左端可表示成(2.60)的右端即可。注意

$$(1+\zeta^j)^k\zeta^{-bj}$$
$$=(1+e^{2\pi ji/c})^k e^{-2\pi bji/c}=(e^{-\pi ji/c}+e^{\pi ji/c})^k e^{(k-2b)\pi ji/c}$$
$$=\left(2\cos\frac{\pi j}{c}\right)^k\left(\cos\frac{(k-2b)\pi j}{c}+i\sin\frac{(k-2b)\pi j}{c}\right).$$

但因级数和为实数值，故知

$$\frac{1}{c}\sum_{j=0}^{c-1}(1+\zeta^j)^k\zeta^{-bj}$$

$$=\sum_{j=0}^{c-1}\left(2\cos\frac{\pi j}{c}\right)^k\left(\cos\frac{(k-2b)\pi j}{c}\right)\cdot\frac{1}{c},$$

这样便完成了公式(2.60)的证明.

特别，于公式中取 $c=3$, $b=0$, 1, 2时，则可导出下列三式：

$$\binom{k}{0}+\binom{k}{3}+\binom{k}{6}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{k\pi}{3}\right), \tag{2.61}$$

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{4}+\binom{k}{7}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{(k-2)\pi}{3}\right), \tag{2.62}$$

$$\binom{k}{2}+\binom{k}{5}+\binom{k}{8}+\cdots=\frac{1}{3}\left(2^k+2\cos\frac{(k-4)\pi}{3}\right), \tag{2.63}$$

类似地可导出下列二等式：

$$\sum_{k=0}^{[n/4]}\binom{n}{4k}=\frac{1}{4}\left(2^n+2(\sqrt{2})^n\cos\frac{n\pi}{4}\right), \tag{2.64}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{4k}=\frac{1}{4}(2^{4n}+(-1)^n 2^{2n+1}). \tag{2.65}$$

以上(2.61)～(2.65)诸等式的详细验证，留给读者自行完成.

第 3 章

交叉分类原理

对于组合性质的事物，常常遇到计算个数的问题，即计数问题．在第二章中我们已经举过一些例子说明如何应用发生函数去进行计数的方法．除发生函数外，还有两个特别有用的计数工具．一是由来已古的“交叉分类原理”，二是近代组合分析中的“Burnside-Pólya 计数定理”．前者只须利用简单的组合恒等式即可证明，后者需要用置换群的某些基本知识和循环指标的表示方法．我们将尽可能从简单的例子分析出发，来阐明这些计数工具的基本思想和运用方法．本章中只讨论交叉分类原理及其应用，关于 Burnside-Pólya 定理留待第五章再讲．

§1 交叉分类原理

让我们先从两个简单的例子谈起．

例 1 在由 15 人组成的出国访问的棋艺代表团中，有 9 名围棋手，7 名象棋手．其中有 3 人兼擅围棋与象棋，问此团中包含非棋手几人？

注意，兼精围棋与象棋的 3 名棋手在 9 名围棋手和 7 名象棋手中都被算进去了，所以在 $9+7=16$ 这个总和中，3 名棋手已被计数两次．这就是说，16 中多算了一个 3，因而代表团中具有棋手身份的成员实际上只有

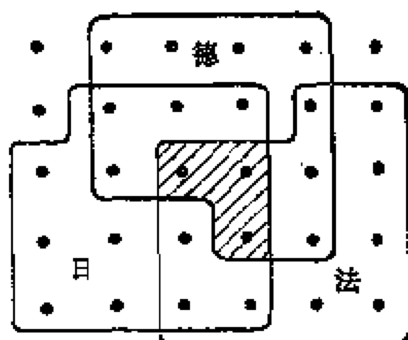
$$(9+7)-3=13\ (\text{名}).$$

这样的算法中已经显示了"包含"和"排除"的原则．因为$(9+7)$中包含了棋手总数，但对双重身份的棋手各多算了一次，因此还需减3，这就表现了排除法．

本题中所求答数则为

$$15-(9+7)+3=2,$$

即代表团中有2名非棋手．



例2 数学系三年级甲班共有学生30名．在学完英语的基础上，本学期又开了日、德、法三门外语以供选修．班上选修日语的有15人，选修德、法语的各14人，同时选修日、德语的有7人，同时选修日、法语和法、德语的各有6人，三门全选的仅有3人．问此班中本学期未选外语的学生有几人？

将此班中每个学生看作一个点，作出图示如上．用E_1、E_2、E_3分别表示选修日、德、法各种外语的学生集合．以$n(E)$表集合E中所包含的点的个数，于是按题设即有：

$$n(E_1)=15,\ n(E_2)=n(E_3)=14,\ n(E_1E_2)=7,$$

$$n(E_1E_3)=n(E_2E_3)=6,\ n(E_1E_2E_3)=3.$$

为了求出未选外语的学生人数，我们只需求出选了外语(即至少选一门外语)的学生人数．为此让我们先将选各门外语的人数统统加起来，即$n(E_1)+n(E_2)+n(E_3)=15+14+14=43$．这当然大大超过了班级人数，但这并不奇怪，因为凡是同时选修任何两门外语的人数均被计算了两次．这样自然就想到了要"排除"，即减去$n(E_1E_2)+n(E_1E_3)+n(E_2E_3)=7+$

$6+6=19$，于是得 $43-19=24$．稍稍细心一点的人马上会发现这 24 还并非是选修了外语的学生数，这是因为仅选修一种外语的人在 43（第一次包含）中各被算了一次．只选修两种外语的人在 43 中各被计算 2 次，但在减 19（第一次排除）的过程中又各被减一次，因此也等于说在 24 中各被计算一次．但问题就出在三门外语全选的 3 人身上，这 3 个人在第一次包含中作为 E_1, E_2, E_3 的元素各被计算了 3 次，但在第一次排除中作为 E_1E_2, E_1E_3, E_2E_3 的元素又各被减掉了 3 次，因此在 24 中这 3 个人实际等于没算．为此，要得到所求人数，就必须把他们再"包含"进来．这样我们得到

$$43-19+3=27,$$

这个"27"——对于仅选一门外语、只选两门外语、三门外语全修的各种学生都计算到了，且每人计算一次．因此，这就正是我们要求的选了外语的学生总数．于是，$30-27=3$(人)，就是说，班上只有 3 人未选外语．

正是这种"包含"，包含多了再"排除"，排除多了再"包含"，…用"包含"和"排除"反复交替来达到求得准确答案的计数方法，大约早在三个世纪之前，就已经被人们发现，并将其总结为一般的原理，这就是

定理 1（包含排除原理 Principle of inclusion and exclusion） 设有 N 个事物，其中有些事物具有性质 $p_1, p_2, \cdots, p_s$ 中的某些性质．令 N_i 表示具有 p_i 性质的事物个数，N_{ij} 表示兼有 p_i 及 p_j 性质的事物个数，此处 $i \neq j (1 \leqslant i, j \leqslant s)$．由此定义，$N_{ij}$ 及 N_{ji} 应代表同一数值，并且凡兼具 p_i, p_j 性质的事物也认为具有性质 p_i 或 p_j．一般地，设

$N_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ = 具有性质 p_{i_1}, p_{i_2}, $\cdots$, p_{i_k} 的事物个数．

那么，N 中不具有任何性质的事物个数即等于

$$N_0 = N - \sum_i N_i + \sum_{i<j} N_{ij} - \sum_{i<j<k} N_{ijk} + \cdots$$
$$+ (-1)^k \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} N_{i_1 i_2 \cdots i_k} + \cdots$$
$$+ (-1)^s N_{12\cdots s}. \tag{3.1}$$

不言而喻，如果将选修了日语、德语、法语分别看成是具有性质 p_1, p_2, p_3，则例 2 恰好是此原理对于三个性质的情形的应用。

在给出定理的正式证明之前，让我们先来对公式的结构作些直观分析(象在前二例中所作过的那样)。为了求出 N 个事物中不具任何性质的事物个数，当然只要从 N 中减去至少具有一个性质的事物的个数就可以了。而至少具有一个性质的事物的个数 S 就是

$$S = \sum_i N_i - \sum_{i<j} N_{ij} + \sum_{i<j<k} N_{ijk} - \cdots$$
$$+ (-1)^{k-1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} N_{i_1 i_2 \cdots i_k} + \cdots$$
$$+ (-1)^{s-1} N_{12\cdots s},$$

这是因为在第一个和式 $\sum_i N_i$ 中确实把具有任何一种性质事物都计算过了，但却把具有两种或两种以上性质的事物各多算了若干次。例如，对同时兼具性质 p_1, p_2 的事物，在 N_1, N_2 中都各被计数一次，所以就出现了重复计数现象，第二项 $-\sum_{i<j} N_{ij}$ 用意在于把重复计数的对象个数再排除出去。但这样一来，又会出现排除过多的现象，虽然在和式 $\sum_i N_i - \sum_{i<j} N_{ij}$ 中恰好具有一种或两种性质的事物都正确的计数了一次，但对于譬如象具有 p_1, p_2, p_3 性质的一个事物，它在 $\sum_i N_i$ 中被计数三次，多算了两次，而在 $-\sum N_{ij}$ 中又被排除了 $\binom{3}{2}=3$

次，结果是一次也没有保留，所以又须靠 $+\sum N_{ijk}$ 中的一项去补还它一次．仿此类推，可见 S 等式的右端

$$\sum N_i-\sum N_{ij}+\sum N_{ijk}-\cdots$$

的各和式正好起着盈亏相抵的作用(加多了减，减多了再加)．至于这样加、减下去，最后所得到的公式是否就正确，那就要看对任何一个具有性质的事物是否都准确地被计数一次了，而这正是下面证明中要严格验明的事．

证明 假设 N 个事物中的任一特定事物 T 刚好只具有 k 个性质 $p_1, p_2, \cdots, p_k(1\leqslant k\leqslant s)$．则此事物在 $N_1, N_2, \cdots, N_k$ 中都被计数一次，所以在和式 $\sum\limits_i N_i$ 中显然一共被计数了 $\binom{k}{1}=k$ 次．同理，在和式 $\sum\limits_{i<j} N_{ij}$ 中它显然被计数了 $\binom{k}{2}=\frac{1}{2}k(k-1)$ 次．依此类推，可见它在下列总和

$$S=\sum_i N_i-\sum_{i<j} N_{ij}+\cdots+(-1)^{s-1}N_{12\cdots s}$$

中一共被计数的次数是

$$\binom{k}{1}-\binom{k}{2}+\cdots+(-1)^{k-1}\binom{k}{k}$$
$$=1-(1-1)^k=1\quad(\text{次}),$$

这表明具有性质的每一事物在 S 中都被计算一次，可见 S 即等于具有任何性质的事物的总数．因此

$$N_0=N-S,$$

便是不具有任何 p_i 性质的事物个数．定理证毕．

现在假定 $r\geqslant 1$，如果我们要求 N 个事物中恰只具有 r 个性质的事物的个数，以 $N(r)$ 表示这个数目，则有

定理 2

$$N(r)=\sum_{i_1<\cdots<i_r} N_{i_1\cdots i_r}-\binom{r+1}{r}\sum_{i_1<\cdots<i_{r+1}} N_{i_1\cdots i_{r+1}}$$

$$+\cdots+(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\sum_{i_1<\cdots<i_k} N_{i_1\cdots i_k}$$

$$+\cdots+(-1)^{s-r}\binom{s}{r}N_{12\cdots s}. \qquad (3.2)$$

证明 同定理1的证明一样，只须注意在右端的和式中对每个具有少于 r 个性质的事物均未计入，而对于每个恰只具有 r 个性质的事物均在和 $\sum_{i_1<\cdots<i_r} N_{i_1\cdots i_r}$ 中计算了一次．为了论证等式的真实性，只须验明任何具有 k 个性质($k>r$)的特定事物 T 均被计算了0次就可以了．而事实上，这种 T 在和式中被计数的总次数为

$$\binom{k}{r}-\binom{k}{r+1}\binom{r+1}{r}+\binom{k}{r+2}\binom{r+2}{r}$$

$$-\cdots+(-1)^{k-r}\binom{k}{k}\binom{k}{r}$$

$$=\sum_{\mu=r}^{k}(-1)^{\mu-r}\binom{k}{\mu}\binom{\mu}{r}=\sum_{\mu=r}^{k}(-1)^{\mu-r}\binom{k}{r}\binom{k-r}{\mu-r}$$

$$=\binom{k}{r}\sum_{\mu=0}^{k-r}(-1)^{\mu}\binom{k-r}{\mu}=0\ (次)$$

(这个恒等式的证明也可参看第二章第三节中例3的等式(2.4))．定理证毕．

定理1和定理2容易推广成如下的一般形式：仍设 S 是一个 N 元集合．假定对每个 $a\in S$，都赋予一个重量(或称"权")，记为 $W(a)$．令 $\mathbf{P}$ 表示一组性质 $p_1, p_2, \cdots, p_s$．这 s 个性质可以看成为一个 s 元集合 $\mathbf{P}=\{p_1, p_2, \cdots, p_s\}$．令 $\{p_{i_1},$

$p_{i_2}, \cdots, p_{i_r}\}$ 为 $\mathbf{P}$ 的一个 r 元子集. 又令 $W(p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_r})$ 代表 S 中一切至少同时具有性质 $p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_r}$ 之诸元的重量之和. 又记 $W(r)=\sum W(p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_r})$, 这个和式取遍 $\mathbf{P}$ 内的一切 r 元子集. 特别, 令 $W(0)$ 代表 S 集合中一切元的重量之总和. 有了上面的这些定义之后, 就可以叙述如下一般形式的包含排除原理:

定理 3 设 $E(r)$ 表示集合 S 中恰好具有 r 个性质的所有元素的重量之和. 那么我们有下列公式

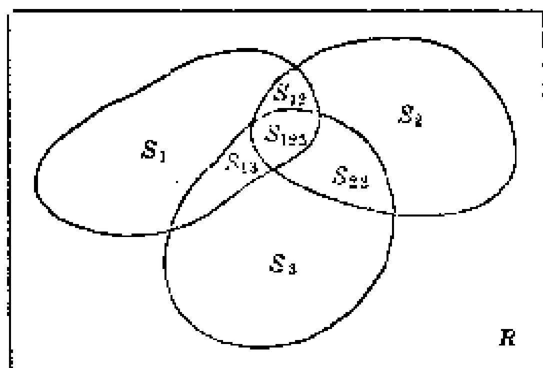
$$E(r)=W(r)-\binom{r+1}{r}W(r+1)+\binom{r+2}{r}W(r+2)-\cdots+(-1)^{s-r}\binom{s}{r}W(s), \tag{3.3}$$

特别, 令 $r=0$, 则得

$$E(0)=W(0)-W(1)+W(2)-\cdots+(-1)^{s}W(s). \tag{3.4}$$

这就是 S 中不具有 $\mathbf{P}$ 中任何性质的所有元素的重量之和. 又如果规定各元素的重量都是单位 1 时, 则公式(3.4)就是定理 1 中的公式(3.1), 而(3.3)就是定理 2 中的公式(3.2). 至于定理的证明, 则完全同定理 2 的证明类似, 读者不难自行补出.

必须指出, 为使包含排除原理能有更大的应用范围, 对集合中的元素引进"重量"或"权"的概念是十分必要的. 例如, 试考虑三个连通区域 S_1, S_2, S_3 的面积计算问题. 如图所示, S_{12}, S_{13}, S_{23}, S_{123} 分别代表各区域的相交部分, 即



$$S_{12}=S_1\cap S_2,\quad S_{13}=S_1\cap S_3,$$

$$S_{23}=S_2\cap S_3,\ S_{123}=S_1\cap S_2\cap S_3.$$

假设已经知道所有这些区域(包括相交区域)的面积，试问怎样计算联合区域 $S_1\cup S_2\cup S_3$ 的面积?

因为面积可以取任意实数值（未必是整数），所以这里碰到的是个计算问题而非计数问题．但只要把 S_1, S_2, S_3, S_{12}, $\cdots$ 等等分别看作是具有性质 p_1, p_2, p_3, p_1 及 p_2 等等元素的集合(注意把每个不可分的小块看成是一个元素，若以 $\bar{S}$ 表 S 的余集，则本图一共有 8 个这种小块，即 $S_1\cap S_2\cap S_3$, $S_1\cap S_2\cap \bar{S}_3$, $\cdots$ 直到 $\bar{S}_1\cap\bar{S}_2\cap\bar{S}_3$, 而对于包含在 S_i 中的小块就说是具有性质 p_i)．现在把相应的面积 $m(S)$ 看作元素 S 的权或重量，则问题便化归成定理 3 所说的类型．因此，所求 $S_1\cup S_2\cup S_3$ 的面积即等于

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{3}S_i\right)=\sum_{i=1}^{3}m(S_i)-(m(S_{12})+m(S_{13})+m(S_{23}))+m(S_{123}).$$

特别，作为矩形区域 R 中的余集 $R-S_1\cup S_2\cup S_3$ 来说，该余集的面积即等于

$$m(R-S_1\cup S_2\cup S_3)=m(R)-\sum_{i=1}^{3}m(S_i)+\sum_{i<j}m(S_{ij})-m(S_{123}).$$

用类似的考虑，可以从定理 3 直接推出集合并的面积公式是

定理 4

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{s}E_i\right)=\sum_{i=1}^{s}m(E_i)-\sum_{i<j}m(E_iE_j)+\sum_{i<j<k}m(E_iE_jE_k)-\cdots+(-1)^{k-1}\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}m(E_{i_1}\cdots E_{i_k})+\cdots+(-1)^{s-1}m(E_1\cdots E_s). \qquad (3.5)$$

自然，定理 4 的结论不只是对平面上的可测集合 E_i 正确，当我们考虑的是某个可测空间$(\Omega, \mathscr{F}, m)$(它是这样的三元组，Ω 是基本空间，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的子集的 Borel 域，m 是 $\mathscr{F}$ 上的测度)的可测子集时，结论也仍然成立．倘若全空间的测度是有限的(即 $|m(\Omega)|<\infty$)，则应用集合论中的对偶原理，由定理 4 立即得到它的等价形式：

定理 4′

$$
\begin{aligned}
m\left(\bigcap_{i=1}^{s}\overline{E}_i\right)&=m\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{s}E_i}\right)=m(\Omega)-m\left(\bigcup_{i=1}^{s}E_i\right)\\
&=m(\Omega)-\sum_{i=1}^{s}m(E_i)+\sum_{i<j}m(E_iE_j)\\
&\quad-\sum_{i<j<k}m(E_iE_jE_k)\\
&\quad+\cdots+(-1)^k\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k}m(E_{i_1}\cdots E_{i_k})\\
&\quad+\cdots+(-1)^s m(E_1\cdots E_s).
\end{aligned}\tag{3.6}
$$

式(3.5)和(3.6)在涉及测度运算时都是重要和常用的．

由于在上述的诸公式的构成中，不断的使用包含和排除的思想，所以由此得到的公式统称之为**包含和排除原理**，有时也称为**盈亏原理**或**多去少补法**．又在证明中经常要考虑到元素具有或不具有某些性质，按照性质来对元素分类，所以这种方法还有另一个名称——**交叉分类原理**．

§2　在排列组合问题中的应用

例 1　试确定不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4=20$，满足要求 $1\leqslant x_1\leqslant 6$，$0\leqslant x_2\leqslant 7$，$4\leqslant x_3\leqslant 8$ 和 $2\leqslant x_4\leqslant 6$ 的整数解的组数．

当然可以用第二章所讲过的发生函数的方法来解本题，

但在此我们却采用一种通过直观分析的办法借助于交叉分类原理来求得答数. 所用的方法对于同一类型的其它问题也不失一般性.

首先注意,方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$(r 为非负整数)的非负整数解的组数就是 n 种相异事物中允许重复(重复次数不限)取 r 个的组合方法数. 而据第一章第一节公式6知这就是$\binom{n+r-1}{r}$. 令 $z_1=x_1-1$, $z_2=x_2$, $z_3=x_3-4$, $z_4=x_4-2$. 则问题化为求方程 $z_1+z_2+z_3+z_4=20-7=13$ 的满足条件 $0\leqslant z_1\leqslant 5$, $0\leqslant z_2\leqslant 7$, $0\leqslant z_3\leqslant 4$, $0\leqslant z_4\leqslant 4$ 的整数解组数.

将此方程的所有非负整数解看作集合 Ω, 则由以上的提示知

$$N=n(\Omega)=\binom{4+13-1}{13}=\binom{16}{3}=560$$

(记号 $n(\Omega)$表示 Ω 中所含元素的个数). 对任何一组非负整数解(z_1, z_2, z_3, z_4)以性质 p_1 表示 $z_1\geqslant 6$, p_2 表示 $z_2\geqslant 8$, p_3 表示 $z_3\geqslant 5$ 以及 p_4 表示 $z_4\geqslant 5$. 则按定理1, 所求解组数就是

$$N_0=N-\sum_{i=1}^{4}N_i+\sum_{i>j}N_{ij}-\sum_{i>j>k}N_{ijk}+N_{1234},$$

作替换 $z'=z_1-6$, 易见 N_1 就是方程 $z'+z_2+z_3+z_4=13-6=7$ 的非负整数解组数. 因而 $N_1=\binom{7+3}{3}=120$. 余皆类似, 不难求得 $N_2=56$, $N_3=N_4=165$; $N_{13}=N_{14}=10$, $N_{23}=N_{24}=1$, $N_{34}=20$, 其它的 N_{ij} 及所有的 N_{ijk} 和 N_{1234} 统统为0. 代入得

$$N_0=560-(120+56+2\times165)+(2\times10+2\times1+20)=96.$$

例 2 假定有 n 对夫妇参加某舞会．约定每一男人必须邀请除自己妻子以外的某一女人伴舞．问所有可能的伴舞方法数共多少种？

考虑由 1, 2, …, n 这 n 个数所作成的排列，对于这排列中的第 k 个位置，称为是数 k 的自身位置；使得每个数都不在其自身位置的排列称为**乱序排列**．显然，所求的伴舞方法数就是长度为 n 的乱序排列的总数．将这总数记作 D_n，则 D_n 即是此例的答案．现在我们用定理 1 来求 D_n 的表达式．

令 Ω 表示由 1, 2, …, n 所作成的 $n!$ 个不同的全排列的集合，以 p_i 表示在排列中数 i 在其自身位置上的性质，则 $N_i=(n-1)!\ (i=1, \cdots, n)$，以及对任何的 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$ 均有 $N_{i_1\cdots i_k}=(n-k)!$．于是

$$D_n=N_0=n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$$

$$+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}(n-n)!$$

$$=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

关于乱序排列的这一公式，早在 1713 年就曾被 Montmort 找到．值得注意的是，对很大的 n 要想用此公式去计算 D_n 的精确数值却十分不易，但是由于当 n 充分大时

$$1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\sim e^{-1},$$

所以我们有非常简单的近似公式

$$D_n\sim n!/e,$$

随之而来的是，在考虑随机排列时，得到的是乱序排列（譬如说，某人写了应该发往 n 个不同地址的 n 封信，封好后竟然乱

填地址，其结果没有一个地址填对）的概率即为 $D_n/n!$，而近似为 $1/e$。

例 3 （n 对夫妻围桌入座问题）兹假定有 n 对夫妇前来参加宴会，要围桌入座，要求男女相间，且每对夫妻两人不得相邻，试求所有可能的入座方法数。

无妨，设想让 n 个女人首先入座，坐在女人相应的位置上，则所有可能的入座办法是 $(n-1)!$ 种（相当于 n 个不同元素所作成的圆排列的总数），对 n 个女人的一种固定的坐法，从某一女人开始按环形顺序给以 1, 2, 3, …, n 的排号，于是男人们也就得到了相应的编号——第 i 号女人的丈夫称为第 i 号男人。再将第 i 个女人和第 $i+1$ 个女人之间的位置称为第 i 号位置 $(i<n)$，第 n 个和第 1 个女人之间的位置称为第 n 号位置。现在假定男人也入好了座，坐在第 i 号位置上的男人的号是 a_i，则要使这种入座合法，必须且只须 $a_i \neq i, i+1$（当 $i \leqslant n-1$）；$a_n \neq n, 1$。这就表明 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是由 1, 2, …, n 作成这样的排列，在表

$$\begin{matrix} 1, & 2, & \cdots, & n-1, & n \\ 2, & 3, & \cdots, & n, & 1 \\ a_1, & a_2, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n \end{matrix}$$

中，它与前两行没有任何一数相重。对这种排列我们称之为**二重乱序排列**。于是我们的问题就化成寻求长度为 n 的二重乱序排列的总数 U_n，而围桌入座的方法数就等于 $(n-1)!U_n$。

假定性质 p_i: $a_i = i$ 或 $i+1$（当 $i \leqslant n-1$）；p_n: $a_n = n$ 或 1，则 U_n 就是不具任何性质 p_i 的排列总数，让我们用交叉分类原理去求它。显然对每个 i，皆有 $N_i = 2[(n-1)!]$，但当 $k>1$ 时，$N_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 就不只依赖于 k 而且依赖于具体的 $i_1, i_2, \cdots, i_k$。因此我们不单独地每个每个去求 $N_{i_1 \cdots i_k}$，而是对每个 k 求

整体的和 $\sum_{i_1<\cdots<i_k} N_{i_1\cdots i_k}$.

假定对于 k 个不同的数 a_{i_1}, $\cdots$, a_{i_k} 它使得性质 p_{i_1}, $\cdots$, p_{i_k} 成立(即每 $a_j=i_j$ 或 i_j+1, 但当 $i_k=n$ 时, $a_{i_k}=n$ 或 1), 则我们有 $(n-k)!$ 种办法将其补成属于 $N_{i_1\cdots i_k}$(实应属于 $E_{i_1}\cdots E_{i_k}$, 此处 E_{i_j} 表示使性质 p_{i_j} 成立的排列的集合)中的排列. 于是我们应该去计算如上的数组$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$有多少, 写下 n 个括弧: (1, 2), (2, 3), (3, 4), $\cdots$, $(n-1, n)$, $(n, 1)$. 则每一组$(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$就对应了 k 个括弧——第 i_1 个, 第 i_2 个, $\cdots$, 第 i_k 个; a_{i_j} 是从第 i_j 个括弧取出的彼此不同的数. 这就等于说$(a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_k})$是从数列 1, 2, 2, 3, 3, 4, $\cdots$, $n-1$, n, n, 1 中选出的满足下面两个条件的 k 数列:

条件 I° 任何两数皆不相邻,

条件 II° 头尾的两个 1 不能同时皆取.

只满足条件 I° 的 k 数列的个数即为从 $2n$ 个位置中取出 k 个不相邻的位置的取法数, 这就是$\binom{2n-k+1}{k}$(注: 这是因为对每一种从 $2n-k+1$ 个位置取出 k 个位置的每一种取法, 将被取出的 k 个位置的前 $k-1$ 个位置每个一分为二, 各向后推出一个空位置则就成了从 $2n$ 个位置中取出 k 个不相邻位置的一种取法, 这种对应是一对一的).

而满足条件 I° 但不满足条件 II° 的 k 数列的个数, 恰好就是从 $2n-4$ 个数 2, 3, 3, 4, $\cdots$, $n-1$, n 的数列中取出 $k-2$ 个不相邻数的取法数

$$\binom{2n-4-(k-2)+1}{k-2}=\binom{2n-k-1}{k-2}.$$

由此即得所求的$(a_{i_1}, \cdots, a_{i_k})$的数组数是

$$\binom{2n-k+1}{k}-\binom{2n-k-1}{k-2}=\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}.$$

由此应用定理1即得二重乱序排列的总数

$$\begin{aligned}U_n=&n!-2n(n-1)!\\&+\cdots+(-1)^k\frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!\\&+\cdots+(-1)^n2.\end{aligned}$$

例4 自然数高次方的求和公式

本例中将用交叉分类原理来推导自然数 s 次方的求和公式. 对固定的正整数 k, s, 让我们将 k^s 看成是 s 个人踏上 k 节车厢的不同上法总数; 对于任何正整数 $1\leqslant r\leqslant s$, 用 φ_r^s 表示 s 个人踏上 r 节车厢,但每节车厢皆不空的所有上法总数.

s 个人踏上 k 节车厢的所有可能上法可以如此区分为互不相交的 s 类: s 个人实际踏上了同一节车厢; s 个人共踏上两节车厢; …; s 个人分别踏上了 s 节车厢. 这 s 类上法数显然分别是

$$\binom{k}{1}\varphi_1^s,\ \binom{k}{2}\varphi_2^s,\ \binom{k}{3}\varphi_3^s,\ \cdots,\ \binom{k}{s}\varphi_s^s.$$

由此立得

$$k^s=\sum_{r=1}^{s}\binom{k}{r}\varphi_r^s,$$

应用第一章中的组合恒等式(1.34): $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{k}{r}=\binom{n+1}{r+1}$ 即得

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^s\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{r}\right)=\sum_{r=1}^{s}\varphi_r^s\binom{n+1}{r+1}.$$

剩下的问题就是如何去求 φ_r^s 了. 应用交叉分类原理, 假定 Ω

是 s 个人任意地踏上 r 节车厢的所有可能的上法的集合，则 $n(\Omega)=r^s$. 一种上法：若使得第 i 个车厢是空着的，则说它具有性质 p_i，则显然有 $N_i=(r-1)^s$，以及当 $k<r$ 时，对任何的 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant r$，有 $N_{i_1\cdots i_k}=(r-k)^s$. 又 $N_{12\cdots r}=0$，于是由定理 1 的公式即知

$$\varphi_r^s=N_0=r^s-\binom{r}{1}(r-1)^s+\binom{r}{2}(r-2)^s$$

$$-\cdots+(-1)^{r-1}\binom{r}{r-1}[r-(r-1)]^s$$

$$=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r}{i}(r-i)^s,$$

代入上式即得

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{r=1}^{s}\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{n+1}{r+1}\binom{r}{i}(r-i)^s.$$

应用第二章所介绍过的高阶零差的表达式，易见此处的 φ_r^s 实即 $\Delta^r O^s$，于是求和的公式又可简单地记作

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{r=1}^{s}\binom{n+1}{r+1}\Delta^r O^s.$$

另外，由于高阶零差同第二类 Stirling 数之间的关系，φ_r^s 又可记为 $\varphi_r^s=s!S_2(s,\ r)$，于是求和公式又可改写为

$$\sum_{k=1}^{n}k^s=\sum_{r=1}^{s}\binom{n+1}{r+1}s!S_2(s,\ r).$$

§3　对初等数论的应用

象通常一样，以 $[x]$ 表示非负实数 x 的整数部分——即不超过 x 的最大整数. 用 $(a,\ b)$ 表示正整数 a 与 b 的最大公约

数. 特别, $(a, b)=1$ 即表示 a, b 互质. 又以 $a|b$ 表示 a 能整除 b, 或者说 a 是 b 的因子; 而 $a\nmid b$ 即表示 a 不能整除 b.

例 1 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是一组两两互质的正整数, 即 $(a_i, a_j)=1(i\neq j)$. 又设 n 是一个给定的正整数. 问在从 1 到 n 这 n 个正整数中不能被任何一个 $a_i(i=1, \cdots, s)$ 整除的正整数 k 有多少个?

用交叉分类原理来解决本题几乎是易如反掌. 因为定理 1 中所需的诸性质已经昭然若揭了. 将从 1 到 n 的所有正整数视作 Ω, 即 $\Omega=(1, 2, \cdots, n)$. 对任何 $k\in\Omega$ 及 $1\leqslant i\leqslant s$, 若 $a_i|k$ 则说 k 具有性质 p_i. 于是 N_i 即 Ω 中能被 a_i 整除的整数的个数, 而 1, 2, $\cdots$, n 中能被 a_i 整除的整数显然只有

$$a_i,\ 2a_i,\ \cdots,\ \left[\frac{n}{a_i}\right]a_i,$$

共 $\left[\frac{n}{a_i}\right]$ 个. 从而 $N_i=\left[\frac{n}{a_i}\right]$. 由于诸 a_i 彼此互质, 因此也有

$$N_{i_1\cdots i_k}=[n/a_{i_1}\cdots a_{i_k}].$$

应用前节公式(3.1)即得 Ω 中不能被任何 a_i 整除的数的个数为

$$N_0=n-\sum_i\left[\frac{n}{a_i}\right]+\sum_{i<j}\left[\frac{n}{a_ia_j}\right]$$
$$-\cdots+(-1)^s\left[\frac{n}{a_1a_2\cdots a_s}\right]. \qquad (3.7)$$

数论中熟知的 Euler φ-函数 $\varphi(n)$ 代表所有满足下列条件 $0<k\leqslant n$, $(k, n)=1$, 即不超过 n 而与 n 互质的正整数 k 的个数. 下例给出了 Euler 的一个经典命题.

例 2 设 n 为任一正整数, 则

$$\varphi(n)=n\prod_p\left(1-\frac{1}{p}\right), \qquad (3.8)$$

这里等式右端的乘积因子中的质数 p 取遍 n 的一切质因子.

令 n 所含的质因子为 $p_1, p_2, \cdots, p_s$. 于是取 p_i 作为例 1 中的 $a_i(i=1, 2, \cdots, s)$, 由(3.7)立即导出

$$\varphi(n)=n\left\{1-\sum_i \frac{1}{p_i}+\sum_{i<j} \frac{1}{p_i p_j}-\cdots+(-1)^s \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_s}\right\}$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

数论中还有一个著名的函数, 叫做 Möbius 函数 $\mu(n)$. 它的定义如下:

$$\begin{cases} \mu(1)=1, \\ \mu(n)=0, \text{ 当 } n \text{ 能被一个大于 1 的整数的平方整除时}, \\ \mu(p_1 p_2 \cdots p_k)=(-1)^k, \text{ 当 } p_1, p_2, \cdots, p_k \text{ 为相异质数时}. \end{cases}$$

引用 μ 函数, 可把(3.8)写成如下的等价形式:

$$\varphi(n)=n \sum_{d \mid n} \frac{\mu(d)}{d}, \tag{3.9}$$

这里(3.9)式右端的和式取遍 n 的一切正因子 d.

应用(3.8)或(3.9)可以立即算出如下的数值表:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$\varphi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	…

为构造质数序列, 有个非常古老的 Eratosthenes 筛法. 设 n 为一给定正整数, 假如所有不超过 $\sqrt{n}$ 的质数为已知, 则用此种筛法即可求得不超过 n 的一切质数. 其法如下: 先写下 $(n-1)$ 个自然数 $2, 3, 4, \cdots, n$. 从此数列中先筛去 2 的倍数, 再筛去 3 的倍数, 依次再筛去 5 的倍数、7 的倍数等等. 直到最后把最大一个质数 $q \leqslant \sqrt{n}$ 者的倍数筛去为止. 这样便可得到区间 $(\sqrt{n}, n]$ 内的一切质数(显然这个区间内的一切合数——非质数都被筛去了).

令 $\pi(x)$ 表示区间 $[2, x]$ 内的质数个数, 则如上筛剩后的

质数个数即等于 $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$.

例 3 我们有如下的公式:

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n})=-1+\sum_{d}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]. \qquad (3.10)$$

这里右端和式中的 d 取遍乘积 $q_1q_2\cdots q_s$ 的一切正因子，而 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 为不超过 $\sqrt{n}$ 的全部质数.

事实上，应用例 1 中的公式(3.7)立即得到

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n})=-1+n-\sum_{i}\left[\frac{n}{q_i}\right]+\sum_{i<j}\left[\frac{n}{q_iq_j}\right]$$

$$-\cdots+(-1)^s\left[\frac{n}{q_1q_2\cdots q_s}\right]=-1+\sum_{d}\mu(d)\,[n/d].$$

§4 对概率计算的应用

在本章 §1 节中推导定理 2 时，我们所由出发的测度空间 $\{\Omega, \mathscr{F}, m\}$，其中 $\mathscr{F}$ 假定是域，而 m 假定是有限可加测度. 而一般通常所指的测度空间则都是假定 $\mathscr{F}$ 为 Borel 域(即对集合的可数并运算封闭的域)，m 为 $\mathscr{F}$ 上的可数可加集合函数. 所以这样做的原因当然是很明显的，因为在使用交叉分类原理时，总是只涉及到集合的有限并.

在概率论中，不相容事件的并的概率就等于各事件的概率的和，这就是熟知的加法公理. 现在让我们应用交叉分类原理的有关公式来推导一般的有限个事件并的概率公式. 在本章 §1 节中讲述定理 4 时已经说过，它对任何可测空间中的可测集均成立，现在特别取可测空间为某个概率场——$\{\Omega, \mathscr{F}, P\}$——其中 Ω 为基本空间，$\mathscr{F}$ 为事件的 Borel 域，P 为 $\mathscr{F}$ 上的概率测度. 假定 $E_i\in\mathscr{F}\,(i=1, 2, \cdots, s)$为任意 s 个事件，则由定理 4 的公式(3.5)立得如下的求事件并的

概率的一般公式:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{s} E_i\right\}=\sum_i P\{E_i\}-\sum_{i<j} P\{E_iE_j\}+\sum_{i<j<k} P\{E_iE_jE_k\}-\cdots+(-1)^{s-1}P\{\bigcap_i E_i\}. \quad (3.11)$$

引进记号

$$s_1=\sum_i P\{E_i\},\ s_2=\sum_{i<j} P\{E_iE_j\},$$

$$s_3=\sum_{i<j<k} P\{E_iE_jE_k\},\ \cdots,\ s_s=P\{\bigcap_i E_i\},$$

则可将(3.11)简记为

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^{s} E_i\right\}=s_1-s_2+s_3-\cdots+(-1)^{s-1}s_s. \quad (3.12)$$

此公式有时被称为 Jordan 概率公式. 它的对偶形式

$$P\left\{\bigcap_{i=1}^{s} \overline{E}_i\right\}=1-s_1+s_2-s_3+\cdots+(-1)^{s}s_s, \quad (3.13)$$

有时称之为 Poincaré 概率公式.

类似地,从与定理 3 相应的结果,我们得到的则是: 对任何整数 r, $1\leqslant r\leqslant s$, s 个事件 $E_1, E_2, \cdots, E_s$ 中恰有 r 个同时发生的概率 $P_{[r]}$ 由下面的公式给出:

$$P_{[r]}=s_r-\binom{r+1}{r}s_{r+1}+\binom{r+2}{r}s_{r+2}-\cdots+(-1)^{s-r}\binom{s}{r}s_s.$$

例 1 假设 n 元随机变数$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$有联合分布

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P\{\xi_1<x_1, \xi_2<x_2, \cdots, \xi_n<x_n\},$$

试求"点$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$落入 n 维平行体 $a_i\leqslant\xi_i<b_i(i=1, 2, \cdots, n)$内($a_i\leqslant b_i$ 为常数)"这一事件的概率.

令 A_i, B_i, B 分别代表事件 A_i: $\xi_i<a_i$, $i=1, 2, \cdots, n$;

B_i: $\xi_i < b_i$, $i=1, 2, \cdots, n$, $B=\bigcap_{i=1}^{n} B_i$. 则易见

$$
\begin{aligned}
&P\{a_1 \leqslant \xi_1 < b_1,\ a_2 \leqslant \xi_2 < b_2,\ \cdots,\ a_n \leqslant \xi_n < b_n\} \\
&= P\{(B_1 - A_1)(B_2 - A_2)\cdots(B_n - A_n)\} \\
&= P\{B\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n\} = P\left\{B - \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\} \\
&= P\left\{B - B\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right\} = P\{B\} - P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right\}.
\end{aligned}
$$

由 Jordan 公式知

$$
\begin{aligned}
P\left\{\bigcup_{i=1}^{n} BA_i\right\} = &\sum_i P\{BA_i\} - \sum_{i<j} P\{BA_iA_j\} \\
&+ \cdots + (-1)^{n-1} P\left\{B\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\},
\end{aligned}
$$

由分布函数及事件 B, A_i 的定义, 知有

$$
\begin{aligned}
P\{B\} &= F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n), \\
P\{BA_1\} &= F(a_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n), \\
P\{BA_2\} &= F(b_1,\ a_2,\ \cdots,\ b_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\{BA_n\} &= F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ a_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P\left\{B\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} &= F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n).
\end{aligned}
$$

将这些结果代入前式即得

$$
\begin{aligned}
&P\{a_1 \leqslant \xi_1 < b_1,\ a_2 \leqslant \xi_2 < b_2,\ \cdots,\ a_n \leqslant \xi_n < b_n\} \\
&\quad = F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n) - [F(a_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n) \\
&\qquad + F(b_1,\ a_2,\ \cdots,\ b_n) + \cdots + F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-1},\ a_n)] \\
&\qquad + [F(a_1,\ a_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_n) + F(a_1,\ b_2,\ a_3,\ \cdots,\ b_n) \\
&\qquad + \cdots + F(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{n-2},\ a_{n-1},\ a_n)] \\
&\qquad - \cdots + (-1)^n F(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n).
\end{aligned}
$$

第4章

Möbius 反演公式

在组合数学中，常常遇到各种类型的求和问题与级数变换问题．各种反演公式乃是解决这类问题的有效工具．

在一切离散数学系统中，看来最重要、最常用的一种反演公式就是著名的 Möbius 反演公式．这种反演公式从 60 年代以来经过 G. C. Rota 等人拓广发展以后，已成为最有效的计算工具之一．

本章共分五节，将系统地阐述古典的和近代的 Möbius 反演公式的理论及各种应用．希望读者在学完本章题材之后，能善于运用所介绍的各种反演公式，去处理实践中提出的种种组合数学问题．

§1　古典的 Möbius 反演公式及其应用

古典的 Möbius 反演公式最早出现在初等数论的研究中，它的叙述方式如下：

定理 1（Möbius 反演公式）　假定定义在正整数集上的函数 $f(n)$ 和 $g(n)$ 对任何正整数 n 恒满足关系式

$$f(n)=\sum_{d\mid n} g(d), \tag{4.1}$$

则我们有通过 f 表示 g 的公式

$$g(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)f(n/d), \tag{4.2}$$

反之，从关系式(4.2)也可推出(4.1)。

定理中的求和记号 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因子 d 求和。(4.2)式中出现的 $\mu(d)$ 即是第三章第二节中曾经定义过的 Möbius 函数。回忆一下 $\mu(n)$ 的定义，它是定义在正整数集上的函数，$\mu(1)=1$；当 $n>1$ 时，若 n 能被某一正整数(大于1的)的平方所整除，则 $\mu(n)=0$，否则其质因数分解必有形式 $n=p_1p_2\cdots p_r$，此时令 $\mu(n)=(-1)^r$。

为了证明定理 1，需先来讲述关于 Möbius 函数的一条简单性质。

引理 $\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & 若\ n=1,\\ 0, & 若\ n>1.\end{cases}$

证明 当 $n=1$ 时，n 只有唯一的正因子 1，由 $\mu(1)=1$ 知引理成立。当 $n>1$ 时，设其质因子分解式为

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_r^{k_r},$$

令

$$n^*=p_1p_2\cdots p_r,$$

则易见凡 n^* 的因子皆为 n 的因子，同时除了 n^* 因子外的 n 的因子必能被某一整数平方所整除，从而就有

$$\sum_{d|n}\mu(d)=\sum_{d|n^*}\mu(d).$$

而对于 $\sum_{d|n^*}\mu(d)$，容易计算如下：

$$1-r+\binom{r}{2}-\cdots+(-1)^k\binom{r}{k}+\cdots+(-1)^r\binom{r}{r}$$
$$=(1-1)^r=0,$$

这是因为对于 n^* 来讲能表成 k 个不同质数乘积的因子 d 一共有 $\binom{r}{k}$ 个，对这些因子的每一个皆有 $\mu(d)=(-1)^k$。

现在转来证明定理1. 由(4.1)知对 n 的任何因子 d，有 $f(n/d)=\sum_{d'|n/d} g(d')$，因而有

$$\sum_{d|n}\mu(d)f(n/d)=\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d'|\left(\frac{n}{d}\right)}g(d'),$$

假定 $n=dd'm$，则对确定的 d'，d 取遍 n/d' 的所有因子，因而

$$\sum_{d|n}\mu(d)\sum_{d'|\left(\frac{n}{d}\right)}g(d')=\sum_{d'|n}g(d')\sum_{d|\left(\frac{n}{d'}\right)}\mu(d).$$

对任何 $d'\neq n$，由于 $n/d'>1$，从引理知 $\sum_{d|(n/d')}\mu(d)=0$，从而在最后一个和式中实际上只剩下 $d'=n$ 的一项即 $g(n)$；定理于是得证.

古典的 Möbius 反演公式在数论计算中有许多应用，有兴趣的读者可以去参考有关的数论书籍，在下节中也将略述一二. 这里我们只举一例以示其在典型的组合问题中的应用.

问题 1 由红、蓝、绿三种颜色的珠子取9颗摆成一个圆环，问能得到多少种不同的圆环?

问题 2 用两颗红珠、三颗蓝珠、四颗绿珠摆成一个圆环，问能得到多少种不同的圆环?

在上述两个问题中，考虑的都是关于圆排列问题. 在问题1中，红、蓝、绿三色珠子各自的数目不受限制(珠子的总数为9)，而在问题2中则对各种珠子的数目都作了限定.

这类问题的一般提法是:

I. 问 r 种不同元素允许重复取 n 个所作成的圆排列有多少个?

II. 设 $w_1, w_2, \cdots, w_r$ 为 r 种不同元素，问由 k_1 个 w_1，k_2 个 w_2，$\cdots$，k_r 个 w_r $(k_1+k_2+\cdots+k_r=n)$ 所作成的圆排列有多少个?

现在我们先来讨论如何用 Möbius 反演公式解决问题 I. 首先任取一个满足要求的圆排列，从圆排列的任何一个元素开始向左(向右也可)依次展开成直线排列. 设展开结果为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 将这个有限序列重复无穷多次而生成一个无穷序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n; x_1, x_2, \cdots, x_n; \cdots$. 即这个无穷序列是这样构成的，它的第 N 个位置的元素若 $N \equiv i \pmod n$，就是 x_i. 由作法立知，此序列有周期 n. 现在假定这个序列的最小周期为 d，则必有 $d|n$. 因为若 $d \nmid n$，则必有 $n=md+l$，其中 $0<l<d$. 由于 n 和 d 均为周期，立知 $x_i=x_{n+i}=x_{md+l+i}=x_{l+i}$，可见 l 即为序列的一个周期值，此与 $l<d$ 矛盾.

上述论证实际上表明任何一个圆排列必定有一个最小周期，而这个最小周期又必定是 n 的因子. 以下凡提到周期时，均指最小周期而言.

对任何一个长度为 n 周期也是 n 的圆排列，当从不同地点将其展成线性排列时，显然可以得到 n 个彼此不同的排列，这就是

$$
\begin{array}{l}
x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n \\
x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \ x_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n,\ x_1,\ \cdots,\ x_{n-2},\ x_{n-1}
\end{array}
$$

而对于任何一个长度为 n，周期为 $d<n$ 的圆排列，当展成线排列时却只能展成 d 个不同的线排列. 现在以 $M(k)$ 来记由 r 个不同元素 $w_1, w_2, \cdots, w_r$ 允许重复所作成的长度和周期皆为 k 的圆排列的总数. 当 $d|n$ 时，由于将每一个长度和周期皆为 d 的圆排列重复 n/d 次即可得到一个长度为 n 而周期为 d 的圆排列，所以长度为 n 而周期为 d 的圆排列总数也是 $M(d)$. 由以上讨论又知每个这种圆排列可以展成 d 个不同

的线排列，从而全部长度为 n 的圆排列所能展成的全体不同的线排列的总数就是 $\sum\limits_{d|n} dM(d)$；而另一方面，我们知道，这些线排列就是由 r 个不同元素允许重复取 n 个所作成的全部线排列，其数目自然应该是 r^n，于是得到

$$\sum_{d|n} dM(d)=r^n. \tag{4.3}$$

现在令 $f(n)=r^n$，$g(n)=nM(n)$，则由 (4.3)知 f，g 之间满足关系式(4.1)，从而应用 Möbius 反演公式(4.2)就得到

$$nM(n)=\sum_{d|n}\mu(d)r^{n/d}, \tag{4.4}$$

此即

$$M(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)r^{n/d}. \tag{4.5}$$

这里得到的只是长度为 n，周期也为 n 的圆排列的总数．如果我们要求长度为 n 的圆排列的总数，并用 $T(n)$ 来表示此数，则

$$T(n)=\sum_{d|n} M(d). \tag{4.6}$$

应用公式(4.6)来求问题 1 的解，就相当于对 $r=3$ 的情形来求 $T(9)$．由于 9 只有三个因子 1，3，9 而由(4.5)式

$$M(1)=3,$$

$$M(3)=\frac{1}{3}(\mu(1)3^3+\mu(3)3)=3^2-1=8,$$

$$M(9)=\frac{1}{9}(\mu(1)3^9+\mu(3)3^3+\mu(9)3)$$

$$=3^7-3=3(3^6-1)=2184.$$

由(4.6)即知

$$T(9)=M(1)+M(3)+M(9)=3+8+2184=2195.$$

这表明，用 9 颗红、蓝、绿三色珠子摆成的圆排列一共

有2195 种.

现在来讨论问题 II. 每一个满足要求的圆排列, 当将它展成线排列时, 得到的都是由 k_1 个 w_1, k_2 个 w_2, $\cdots$, k_r 个 w_r 所作成的线排列. 所有这类线排列总数等于多项式系数

$$n!/k_1!k_2!\cdots k_r!. \tag{4.7}$$

对于这种圆排列, 如果它的周期为 d, 则 d 自然也是 n 的因子, 另外这个圆排列也可以看作是由 n/d 个长度为 d 的圆排列重复而成,所以 n/d 必须能够整除每一个 $k_i(i=1,2,\cdots,r)$. 设 $d'=n/d$, 则 $d'|(k_1, k_2, \cdots, k_r)$[*]. 这样, 如果我们用 $M(k_1, k_2, \cdots, k_r)$来表示由 k_1 个 w_1, k_2 个 w_2, $\cdots$, k_r 个 w_r 所作成的长度和周期皆为 n 的圆排列的总数, 就可得到

$$\sum_{d'|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \frac{n}{d'} M\left(\frac{k_1}{d'}, \frac{k_2}{d'}, \cdots, \frac{k_r}{d'}\right) = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}. \tag{4.8}$$

到此, 为了从(4.8)式得到关于 M 的明显表达式, 我们需要对 Möbius 公式作如下的推广:

定理 2(r 元的 Möbius 反演公式) 设

$$f(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \sum_{d'|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} g\left(\frac{k_1}{d'}, \frac{k_2}{d'}, \cdots, \frac{k_r}{d'}\right), \tag{4.9}$$

则

$$g(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \sum_{d'|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \mu(d') f\left(\frac{k_1}{d'}, \frac{k_2}{d'}, \cdots, \frac{k_r}{d'}\right). \tag{4.10}$$

反之, 从(4.10)也能推出(4.9).

证明 从(4.9)⇒(4.10). 将(4.9)代入(4.10)的右端有

[*] $(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ 表示 k_1, k_2, $\cdots$, k_r 的最大公约数.

$$\sum_{d'|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \mu(d') f\left(\frac{k_1}{d'}, \frac{k_2}{d'}, \cdots, \frac{k_r}{d'}\right)$$

$$= \sum_{d'|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \mu(d') \left[\sum_{d \mid \left(\frac{k_1}{d'}, \frac{k_2}{d'}, \cdots, \frac{k_r}{d'}\right)} g\left(\frac{k_1}{d'd}, \frac{k_2}{d'd}, \cdots, \frac{k_r}{d'd}\right)\right]$$

$$= \sum_{d|(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \sum_{d' \mid \left(\frac{k_1}{d}, \frac{k_2}{d}, \cdots, \frac{k_r}{d}\right)} \mu(d') g\left(\frac{k_1}{d'd}, \frac{k_2}{d'd}, \cdots, \frac{k_r}{d'd}\right).$$

令 $d'd=l$，则 $l \mid (k_1, k_2, \cdots, k_r)$，对固定的 l，d' 取遍 l 的所有因子．由此，上式又等于

$$\sum_{l|(k_1,\cdots,k_r)} \sum_{d'|l} \mu(d') g\left(\frac{k_1}{l}, \frac{k_2}{l}, \cdots, \frac{k_r}{l}\right)$$

$$= \sum_{l,(k_1,k_2,\cdots,k_r)} \left[g\left(\frac{k_1}{l}, \frac{k_2}{l}, \cdots, \frac{k_r}{l}\right) \sum_{d'|l} \mu(d')\right]$$

$$= g(k_1, k_2, \cdots, k_r).$$

用类似的方法可由(4.10)推出(4.9)．证毕．

现在令

$$g(x_1, \cdots, x_r) = \left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) M(x_1, \cdots, x_r),$$

$$f(x_1, \cdots, x_r) = \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)!}{x_1! x_2! \cdots x_r!},$$

由(4.8)知(4.9)式成立．从而用(4.10)即得

$$M(k_1, \cdots, k_r)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{d|(k_1,\cdots,k_r)} \mu(d) \frac{\left(\frac{n}{d}\right)!}{\left(\frac{k_1}{d}\right)!\left(\frac{k_2}{d}\right)!\cdots\left(\frac{k_r}{d}\right)!}. \quad (4.11)$$

如果用 $T(k_1, k_2, \cdots, k_r)$ 表示由 k_1 个 a_1，k_2 个 a_2，$\cdots$，k_r 个 a_r 组成的所有圆排列的总数，则由前面的分析可知

$$T(k_1, k_2, \cdots, k_r) = \sum_{d|(k_1,\cdots,k_r)} M\left(\frac{k_1}{d}, \cdots, \frac{k_r}{d}\right). \quad (4.12)$$

现在我们就可以应用公式(4.12)与(4.11)来解决问题 2

了. 由于此时 $k_1=2$, $k_2=3$, $k_3=4$, $n=k_1+k_2+k_3=9$, 所以 $(k_1, k_2, k_3)=(2, 3, 4)=1$. 从而由(4.12)知 $T(2, 3, 4)=M(2, 3, 4)$而由(4.11)得

$$M(2, 3, 4)=\frac{1}{9}\cdot\frac{9!}{2!3!4!}=280.$$

§2 半序集上的结合代数与广义 Möbius 反演公式

本节将讨论 Möbius 反演公式在半序集上的推广. 为此需先在半序集上定义结合代数. 为了读者的方便, 让我们先将有关半序集的一些熟知的数学概念扼要地叙述一下.

给定了一个非空集合 Ω, 假如对其中的某些元 x, y 等(可以不是全体)定义着一种二元关系 $\leqslant$ 而且满足如下条件

(1) 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant z$, 则 $x\leqslant z$ (传递律),

(2) 若 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$ 则 $x=y$ (反称律),

(3) 对每一 $x\in\Omega$, 都有 $x\leqslant x$ (返身律),

那么, 便称 Ω 为依 $\leqslant$ 为序关系的"半序集". 记号"$\leqslant$"可以读作"小于等于", 对于记法 $x\leqslant y$ 的另一种变形, 也可以写作 $y\geqslant x$, 而相应的记号"$\geqslant$"也可读作"大于等于".

特别, 对每对元素之间都存在着序关系的半序集, 将称为"全序集", 或简称为"链".

关于半序集与全序集的例子, 在数学中俯拾即是, 不胜枚举. 例如自然数集(或其子集)按通常的大小关系即作成全序集. 对我们来讲, 最有兴趣的两个半序集的例子乃是

例 1 自然数集 N(或其子集)按照整除关系作成半序

集，即对于正整数 m, n, “$m\leqslant n$”意味着 $m|n$, 即 m 能整除 n, 或 m 为 n 的因子.

例 2 Ω 由任何集合 B 的某些子集所组成. E, $F\in\Omega$, “$E\leqslant F$”当且仅当集合 E 包含于集合 F 之中，这就是说，按照集合的包含关系来决定其序.

例 1、例 2 中所定义的序确实满足上面三条公理是容易验证的.

仿照通常不等式的记法和说法，若 $x\leqslant y$ 而 $x\neq y$, 则可记作 $x<y$ 或 $(y>x)$, 而称 x 小于 y(或 y 大于 x). 一般说来，在半序集中可能有些元之间不存在序关系，此时就说那些元素之间不能进行比较. 特别，$x\nleqslant y$ 表示既非 $x<y$, 又非 $x=y$ (亦即 x 与 y 或者不能比较，或者 $x>y$).

对 Ω 中的二元 x 与 y, 称所有满足不等式条件“$x\leqslant z\leqslant y$”的元 z 所组成的集合为一“截段”，记作 $[x, y]$. 当 x 和 y 不能比较时，根据传递律可知，截段 $[x, y]$ 为空集. 若条件改为“$x\leqslant z<y$”或“$x<z<y$”，则分别记为 $[x, y)$ 和 (x, y)，等等. 又如果 Ω 中的任何截段均只包含有限多个元素，则称 Ω 为“局部有限半序集”. 例 1 就是局部有限半序集，例 2 当所考虑的集合 B 是有限集时也是.

在半序集 Ω 中，如果存在一元 a, 使得 Ω 中所有元 x 都有关系“$a\leqslant x$”，则称 a 为 Ω 的“**最小元**”. 类似地可以定义“**最大元**”(一般说来，半序集中未必存在最小元或最大元).

称 a 为 Ω 的一个“**极小元**”，要是不再存在比 a 更小的元，同样称 b 为一个“**极大元**”，要是不存在比 b 更大的元. 要注意，一个半序集至多只能有一个最小元，但可以有多个极小元，故对于最小元与极小元的两个概念，必须区别清楚. 同样，也决不可将最大元与极大元的概念混为一谈.

半序集 Ω 中的一组元 $x_0, x_1, \cdots, x_s$ 满足不等式条件 $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_s$ 时叫做长度为 s 的链. 特别，我们把 $x_0 < x_1 < \cdots < x_s$ 时叫做长度为 s 的"**真链**".

对于局部有限半序集 Ω 中的任意一对固定元 a, b 而言，如果 $a \leqslant b$，则所有长度为 s 的链 $a \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_{s-1} \leqslant b$ 的个数总是一个有限数.

往后不作特别声明时，本章中所说的半序集都是指的局部有限半序集.

今考虑半序集 Ω 上的所有这样的二元实值函数 $f(x, y)$ $(x \in \Omega,\ y \in \Omega)$ 的全体所作成的集合 $A(\Omega)$，其中每一函数 f 都假定具有性质：当 $x \not\leqslant y$ 时，$f(x, y) = 0$. 在 $A(\Omega)$ 中的函数和 $f+g$ 及数量积 αf 均按通常的办法定义. 让我们来引进函数乘积的概念. 记 $h = f \cdot g$，按下式定义：

$$h(x, y) = \sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) g(z, y).$$

左端的和式取遍截段 $[x, y]$ 中的一切 z；又当求和范围 $x \leqslant z \leqslant y$ 为空集时，规定 $h(x, y) = 0$. 显然，仍有 $h \in A(\Omega)$. 如此定义的乘积，称为"**Dedekind 乘积**". 注意 Ω 既是局部有限半序集，所以上列和式中项数显然是有限的.

对于规定了上述运算的 $A(\Omega)$，我们称之为(Ω 上的)"**结合代数**"(associative algebra). 事实上，在这代数中的乘法结合律 $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ 容易验证如下：

$$\begin{aligned}(f \cdot g) \cdot h(x, u) &= \sum_{x \leqslant y \leqslant u} (f \cdot g)(x, y) h(y, u) \\ &= \sum_{x \leqslant y \leqslant u} \Big(\sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) g(z, y) \Big) h(y, u) \\ &= \sum_{x \leqslant z \leqslant u} f(x, z) \Big(\sum_{z \leqslant y \leqslant u} g(z, y) h(y, u) \Big) \\ &= \sum_{x \leqslant z \leqslant u} f(x, z) (g \cdot h)(z, u) = f \cdot (g \cdot h)(x, u).\end{aligned}$$

由于 x, u 为任意元，故函数间的乘法结合律可以一般地记作 $(f\cdot g)\cdot h=f\cdot(g\cdot h)=f\cdot g\cdot h$.

在结合代数中，有一个特殊的函数，记作 $\delta(x, y)$，定义为

$$\delta(x, y)=\begin{cases}1, & 当\ x=y,\\ 0, & 当\ x\neq y,\end{cases}$$

它叫做 **Kronecker** 的 **δ 函数**．显而易见，对任何 $f\in A(\Omega)$，恒有 $\delta\cdot f=f\cdot\delta=f$，所以 δ 函数在结合代数的乘法中起着单位元的作用，因此也叫**单位函数**．我们再定义一个 **ζ 函数**，

$$\zeta(x, y)=\begin{cases}1, & 当\ x\leqslant y,\\ 0, & 当\ x\not\leqslant y.\end{cases}$$

对于 ζ 函数与 δ 函数之差引进另一函数 $\lambda(x, y)=\zeta(x, y)-\delta(x, y)=(\zeta-\delta)(x, y)$．称它为"**关联函数**"(incidence function)．显见

$$\lambda(x, y)=\begin{cases}1, & 当\ x<y,\\ 0, & 当\ x\not< y.\end{cases}$$

所以关联函数 $\lambda(x, y)$ 的直观意义恰好表示着从 x 到 y 的长度为 1 的真链个数．进而还有一般地关联函数的 k 次自乘

$$\lambda^k(x, y)\equiv(\zeta-\delta)^k(x, y),$$

恰好代表着从 x 延伸到 y 的长度为 k 的真链个数．这个事实可以很容易用归纳法得到证明．事实上，假定 $\lambda^{k-1}(x, y)$ 确实表示从 x 到 y 的长度为 $k-1$ 的真链个数，则

$$\lambda^k(x, y)=\sum_{x\leqslant z<y}\lambda^{k-1}(x, z)\lambda(z, y).$$

任何一个长度为 k 的真链 $x_0=x<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k=y$ 在上面的和式中，当 z 取 x_{k-1} 时，都被计算了一次．反之，对上面和式中不等于零的项，$\lambda^{k-1}(x, z)\lambda(z, y)$，必须 $z<y$．同时 $\lambda^{k-1}(x, z)$ 是从 x 到 z 长度为 $k-1$ 的所有真链个数，于是

$\lambda^{k-1}(x, z)\lambda(z, y)$就是从 x 到 y 最后一节为(z, y)的长度为 k 的真链个数. 当 z 不同时这些真链彼此互异, 而对 $x \leqslant z \leqslant y$ 求和得到就是全部这种真链的总数. 特别, 我们不妨令 $\lambda^0=\delta$. 于是根据乘法结合律, 我们有简单的指数律: $\lambda^m \cdot \lambda^n=\lambda^{m+n}$ $(m \geqslant 0, n \geqslant 0)$.

对于 $f \in A(\Omega)$, 若存在一个 $g_1 \in A(\Omega)$, 使 $f \cdot g_1=\delta$, 则 g_1 称为 f 的右逆. 同理, 使得 $g_2 f=\delta$ 的 g_2 称为 f 的左逆. 下面的引理对于逆函数的讨论已经足够清楚了.

引理 对结合代数 $A(\Omega)$中的函数 f 有右逆或左逆的充要条件是对任何 $x \in \Omega$ 均有 $f(x, x) \neq 0$. 当此条件满足时右逆等于左逆, 故今后可一律称之为逆, 并将 f 的逆记为 f^{-1}.

证明 假设 $g(x, y)$为 $f(x, y)$的右逆, 则由 δ 函数及乘法定义,

$$1=\delta(x, x)=f(x, x) g(x, x).$$

可见必须有 $f(x, x) \neq 0$(当 f 存在左逆时亦然).

现在假设对任何 x 均有 $f(x, x) \neq 0$, 让我们用归纳法的方法来定义一个 $g(x, y)$ 使 $f \cdot g=\delta$. 首先令 $g(x, x)=\dfrac{1}{f(x, x)}$. 假定 $x<y$, 如果对满足 $x<z \leqslant y$ 的所有 z, $g(z, y)$均已定义完毕, 则为使 g 能成为右逆, 必须有

$$\sum_{x \leqslant z \leqslant y} f(x, z) g(z, y)=\delta(x, y)=0,$$

从而
$$f(x, x) g(x, y)=-\sum_{x<z \leqslant y} f(x, z) g(z, y).$$

由于右端和为已知, 又 $f(x, x) \neq 0$, 所以只须定义

$$g(x, y)=\Big[-\sum_{x<z \leqslant y} f(x, z) g(z, y)\Big] / f(x, x).$$

由定义法本身即知 g 必为 f 的右逆. 用类似方法可以定义左逆. 现假定 g_1, g_2 分别为 f 的右逆与左逆, 则应用乘法的结

合律立即可得 $g_2=g_2\cdot\delta=g_2\cdot(f\cdot g_1)=(g_2\cdot f)\cdot g_1=\delta\cdot g_1=g_1$.

由于对 ζ 函数来讲，恒有 $\zeta(x, x)=1$, 因而它满足引理条件，从而一定有逆，这使我们可以作出下面的

定义 将 $\zeta(x, y)$ 的逆函数记作 $\mu(x, y)$（即 $\mu=\zeta^{-1}$），则

$$\mu\zeta=\zeta\mu=\delta$$

称 $\mu(x, y)$ 为**广义 Möbius 函数**.

μ 作为 ζ 的左逆，按乘法定义

$$\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(x, z)\zeta(z, y)=\delta(x, y)=\begin{cases}1, & x=y,\\ 0, & x\neq y,\end{cases}$$

再由 $\zeta(x, y)$ 的定义即知，对任何 $x<y$, 均有

$$\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(x, z)=0.$$

将 μ 视作 ζ 的右逆，得到的相应等式则是

$$\sum_{x\leqslant z\leqslant y}\mu(z, y)=0.$$

此二式中的任何一个加上条件 $\mu(x, x)=1$, 均可一意地决定 μ.

下面我们来讲述广义的 Möbius 反演公式.

定理 3 设 $f(x)$ 是定义在半序集 Ω 上的一个实值函数. 又设 Ω 中存在一元 a, 使当 $x<a$ 时恒有 $f(x)=0$. 于是由如下的不定和式：

$$g(x)=\sum_{y\leqslant x}f(y), \tag{4.13}$$

可得出反演公式

$$f(x)=\sum_{y\leqslant x}g(y)\mu(y, x). \tag{4.13'}$$

反之，由(4.13′)式亦可推出(4.13)式.

证明 显然(4.13)式的右端可以记作 $\sum\limits_{a\leqslant y\leqslant x}f(y)$, 因而和式中实际上是有限项，故函数 $g(x)$ 是有意义的. 今将(4.13)

式右端代入(4.13′)式右端,可得

$$\sum_{y\leq x} g(y)\mu(y, x) = \sum_{y\leq x}\left(\sum_{z\leq y} f(z)\right)\mu(y, x)$$

$$= \sum_{z\leq x}\sum_{z\leq y\leq x} f(z)\mu(y, x) = \sum_{z\leq x} f(z)\sum_{y\leq x}\zeta(z, y)\mu(y, x)$$

$$= \sum_{z\leq x} f(z)\delta(z, x) = f(x),$$

这表明从(4.13)式可推(4.13′)式.现假定(4.13′)式成立,则

$$\sum_{y\leq x} f(y) = \sum_{y\leq x} f(y)\zeta(y, x) = \sum_{y\leq x}\sum_{z\leq y} g(z)\mu(z, y)\zeta(y, x)$$

$$= \sum_{z\leq x} g(z)\left(\sum_{z\leq y\leq x}\mu(z, y)\zeta(y, x)\right)$$

$$= \sum_{z\leq x} g(z)\delta(z, x) = g(x).$$

这就是(4.13)式成立.

从证明看来,定理3很简单,但它确是一个有着广泛应用的很基本的计算法则.

定理4 设 $r(x)$ 是 Ω 上的一个实值函数,又设 Ω 中存在一元 b,使当 $x\not\leq b$ 时恒有 $r(x)=0$. 于是从和式

$$s(x) = \sum_{y\geq x} r(y) \tag{4.14}$$

可得出

$$r(x) = \sum_{y\geq x}\mu(x, y)s(y). \tag{4.15}$$

反之亦然.

此定理的证法与定理3完全相似,故从略.

定理4叫作定理3的"对偶定理",两相比较,只是将所有的不等号≤一律改为≥而已. 事实上,在一个半序集中,序关系≥仍然具有传递性、反称性与返身性,故任何涉及关系 $a\leq b$ 等等的命题或定理的证法,皆可平行地用来论证涉及关系 $b\geq a$ 等等的同样命题或定理,这里只需在推理过程中将≤一律改为≥即可. 详细说来,有下列"对偶原则":

在每一个半序集中成立的任何定理、当把定理陈述中的符号$\leqslant$一律换成$\geqslant$后，定理仍然成立.

下面给出广义 Möbius 函数与反演公式应用的几个简单例子(例 7 是关于结合代数的应用).

例 3 考虑例 1 中按整除关系来定义序的自然数集 N. 对任何 $m|n$, 如果 $m\leqslant s\leqslant n$, 则 $s=md$, 且 $n=sr$, 从而 $dr=n/m$, 这表明截段$[m, n]$的元素与数 n/m 的因子相对应. 令

$$\mu'(m, n)=\mu\left(\frac{n}{m}\right),$$

则由第一节的引理即知

$$\mu'(n, n)=\mu\left(\frac{n}{n}\right)=1.$$

当 $m<n$ 时

$$\sum_{m\leqslant s\leqslant n}\mu'(s, n)=\sum_{m\leqslant s\leqslant n}\mu\left(\frac{n}{s}\right)=\sum_{d|n/m}\mu\left(\frac{n}{m}\Big/d\right)=0,$$

这表明如此定义的 μ' 实际就是 N 上的广义 Möbius 函数, 即 $\mu(m, n)=\mu(n/m)$. 这等式沟通了广义 Möbius 函数同古典 Möbius 函数之间的关系. 而由此立见定理 3 在此情形立即化为初等数论中古典的 Möbius 反演公式(即定理 1):

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d)\Leftrightarrow f(n)=\sum_{d|n}g(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}g\left(\frac{n}{d}\right)\mu(d).$$

例 4 如果我们在正整数集 N 中, 按照通常的大小关系定义序关系, 则构成全序集. 此时 N 上的 Möbius 函数非常简单. 首先,对每个整数 m, 恒有 $\mu(m, m)=1$. 再根据条件(相当于条件 $\mu\zeta=\delta$)

$$\mu(m, n)=-\sum_{m\leqslant z<n}\mu(m, z),$$

立得 $\mu(n-1, n)=-1$, $\mu(m, n)=0$(当 $m<n-1$ 时). 此时反演公式(4.13), (4.13′)便成为

$$g(n)=\sum_{0\le m\le n} f(m) \Leftrightarrow f(n)$$
$$=g(n)-g(n-1)=\Delta g(n-1),$$

这恰好是差分法中的基本求和公式.

例 5 假定 Ω 是由某有限集合 T 的所有子集按包含关系定序的半序集，读者不难自行验证（不妨留作习题），此时 Möbius 函数即：$\mu(x, y)=(-1)^{n(y)-n(x)}$，其中 $n(x)$, $n(y)$ 分别为 x 和 y 中的元素个数.

现在假定 K——"N 个事物的集合"，另外有 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 这样 n 条性质. 对 K 中的每个事物和每一条性质 p_i，可以谈及该事物具有或不具有性质 p_i. 令 $T=\{1, 2, \cdots, n\}$. 对于任何 $x\subset T$，假定 $f(x)$ 表示（K 中的）恰好只具有所有性质 p_i $(i\notin x)$ 的事物个数，那么至少对 $i\notin x$ 的所有性质 p_i 都具有（也就是说，还可以具有其它性质）的事物的个数就是

$$g(x)=\sum_{y\le x} f(y),$$

则应用定理 3 中的反演公式(4.13)就得到

$$f(T)=\sum_{y\le T} g(y)\mu(y, T)=g(T)-\sum_{n(y)=n-1} g(y)$$
$$+\cdots+(-1)^j\sum_{n(y)=n-j} g(y)$$
$$+\cdots+(-1)^n\sum_{n(y)=0} g(y),$$

这实际上就是我们在第三章讨论过的交叉分类原理. 因为 $f(T)$ 按定义是不具有任何性质的事物个数. 即 $N(0)$，又 $g(T)$ 是对一个性质的空集中的性质都成立的事物个数. 这实际就是全部的 K 的元素，即 N. 而上式中的对于 $n(y)=n-j$ 的 $g(y)$，就表示至少对与不属于 y 的 j 个 i 相应的性质 p_i 必皆成立（当然还可以有别的）的事物的个数.

例 6 设 Ω 是一个只含有限多个元素的半序集，其中有

着一个唯一的极小元 O 和唯一的极大元 I, 且 $O\neq I$. 这在早期文献中叫做 Weisner 系统. 对于这样一个有限半序集说来, 公式(4.12)及(4.13)便是当初 Weisner–Hall 应用于群论计数问题的一个有效工具. 事实上, 有限 P 群(阶为质数幂的群)及其子群按包含关系构成的系统正好就是这样的半序集. 在这样的有限半序集中, Möbius 函数的计算也较简单. 设 $x\in\Omega$, $y\in\Omega$, 且 $x\leqslant y$, 则

$$
\begin{aligned}
\mu(x, y) &= \zeta^{-1}(x, y) = (\delta+\lambda)^{-1}(x, y) \\
&= (\delta-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\cdots)(x, y) \\
&= \lambda^0(x, y)-\lambda(x,y)+\lambda^2(x,y)-\cdots+\cdots,
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

既然截段 $[x, y]$ 中的元的个数是有限的, 所以(4.16)式中的项数是有限的, 这是因为 $\lambda^k(x, y)$ 正好表示从 x 到 y 的长度为 k 的真链的个数. 自然, 展开式(4.16)对于一般局部有限半序集说来也是对的. 特别 $E=1+\mu(O, I)$ 叫做 Ω 的 Euler 特征数, 其值为

$$
E = 1-\lambda(O, I)+\lambda^2(O, I)-\cdots+\cdots. \tag{4.17}
$$

对于群论计数问题感兴趣的读者, 若有必要请直接查阅 Weisner 与 Hall 等人的工作.

例 7 就例 1 中所考虑的特殊的半序集说来, 在其结合代数中, 有一个引人注目的子代数, 它是由那些形如 $f(m, n)=G(n/m)$ 的全体函数构成的, 在此子代数中 Dedekind 乘积可记为

$$
H(n) = \sum_{k\mid n} F\left(\frac{k}{1}\right)G\left(\frac{n}{k}\right) = \sum_{km=n} F(k)G(m), \tag{4.18}
$$

我们令这子代数中的函数 $F(s)$ (s 为复变量)对应于一个形式上的 Dirichlet 级数 $\hat{F}(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} F(n)/n^s$, 而乘积函数 $H(s)$

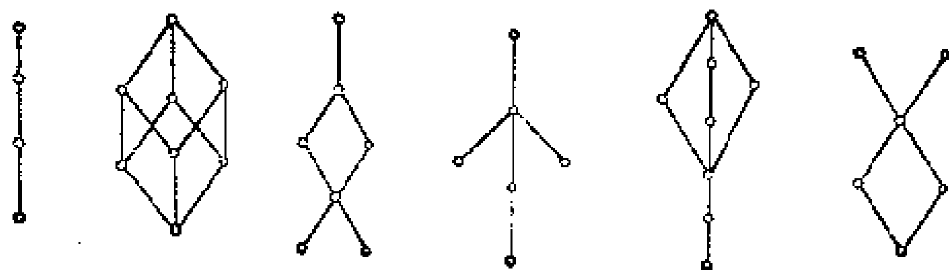
对应于相应的级数乘积 $\hat{H}(s)=\hat{F}(s)\hat{G}(s)$. 容易证明(请读者作为一个习题), 对于古典的 Riemann zeta 函数 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, 它所对应于上述子代数中的 ζ 函数的逆 μ(即满足条件 $\mu\zeta=\delta$ 的 μ), 恰好对应于 Dirichlet 级数

$$\frac{1}{\zeta(s)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{4.19}$$

这是 Riemann ζ 函数论里的一个熟知恒等式, 也可以独立地予以验证. 如欲了解函数 $\zeta(s)$ 更多的重要性质, 建议查阅 Titchmarsh 的著作《Riemann ζ 函数》.

一般说来, 对应于数学上熟知的或完全人为的半序集, 都有 Möbius 函数与反演公式(4.13)、(4.13′) 及 (4.14)、(4.15). 所以属于这些类型的具体而特殊的反演公式, 事实上是多至无限的.

在一半序集中, 若 $x<y$ 且 $[x, y]$ 中不再含有异于 x, y 的元, 则称"y 覆盖 x". 对于有限半序集, 可以用图示法表现其结构. 例如, 半序集中的元可用小圆圈表示, 若 $x<y$, 则把表示 y 的圆圈画在那个表示 x 的圆圈的上方. 特别, 当 y 覆盖 x 时, 则从 y 向下侧画一线联结 x. 这样一来就可得到一个表示半序集结构的图形. 图中是几个例子: 左边第一个图形代表一个只含四个元的全序集(例如, 它可以是 1, 2, 4, 8 四个数按可除性关系作成的全序集). 第二个图形可以代表



由三个点的集合的全部子集作成的布尔代数(Boolean algebra)，它是具有最大元与最小元的半序集. 第三个图形所表示的半序集有最大元而没有最小元，但却有两个极小元. 最末一个图形是一个有着最小元和两个极大元的半序集.

既然由线段联结而成的无数图形中，有很大一类代表着各种半序集，所以广义 Möbius 函数能成为研究图形理论中的一项计数工具也就不足为奇. 在 Rota 的工作中曾讨论了两个半序集上 Möbius 函数间的联系问题(所谓“Galois”联系)，并叙述了这些概念以及 Möbius 反演公式在格论与图形理论方面的应用.

§3 互反 μ 函数偶与一般的互反公式

广义 Möbius 函数是不是另一类具有更普遍意义的函数的特例呢？换言之，广义 Möbius 反演公式能否再行推广，本节将来讨论这个问题，并得到了肯定的答复.

首先我们观察到，不定和式(4.13)可以改写成

$$g(x)=\sum_{y\le x}f(y)\zeta(y,\ x), \qquad \text{(a)}$$

这样，它与(4.13′)式

$$f(x)=\sum_{y\le x}g(y)\mu(y,\ x), \qquad \text{(b)}$$

形式上便完全处于对等的地位：(a)与(b)便同样地可以看成是某种级数变换了，其中 x 是参变量，$\zeta(y,\ x)$ 与 $\mu(y,\ x)$ 为“变换核”. (a)与(b)是一对互反公式.

现在让我们来分析一下构成互反公式的这一对变换之间的关系. 首先来看看 ζ 与 μ 的结构形式

$$\zeta=\lambda^0+\lambda \quad (\lambda^0=\delta),$$

$$\mu=\lambda^0-\lambda+\lambda^2-\lambda^3+\cdots,$$

它们都是 λ（关联函数）的形式幂级数，并按形式幂级数的乘法满足条件 $\zeta\mu=\mu\zeta=\delta$(互逆条件)．这样，我们便揭示了事物的一个普遍规律性：(a)与(b)之所以能成为互反公式，原来是以各个和式中出现的变换核恰好成为“互逆函数”(λ 的互逆幂级数)作为其条件的．在此，“变换核成互逆”这条件本身具有普遍性；而 ζ 与 μ 恰好是一对具有特别形式的互逆函数．它们本身又具有特殊性．

通过如上的分析，我们获得结论：具有特殊形状的 ζ 与 μ 满足着具有普遍性概念的互逆条件，因而作成一对特殊的互逆函数$\{\zeta, \mu\}$，并从而决定了一对特殊的互反公式(a)与(b)．

现在让我们首先来引进如下的定义．

定义 假设 $\phi(z)=\sum\limits_0^\infty a_k z^k$ 是一个具有实系数的任意幂级数，而 $a_0\neq 0$．又设 $1/\phi(z)=\sum\limits_0^\infty b_k z^k$ 为该级数在形式上的逆，亦即$\left(\sum\limits_0^\infty a_k z^k\right)\left(\sum\limits_0^\infty b_k z^k\right)=a_0b_0=1$，那么

$$\mu_1(x, y)=\phi(\lambda)(x, y)=\sum_{k\geq 0} a_k\lambda^k(x, y), \qquad (4.20)$$

$$\mu_2(x, y)=\phi(\lambda)^{-1}(x, y)=\sum_{k\geq 0} b_k\lambda^k(x, y) \qquad (4.21)$$

便叫做半序集 Ω 上的一对“**互反 μ 函数偶**”，其中 $x\in\Omega$, $y\in\Omega$．

可用记法 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 或 $\{\mu_2, \mu_1\}$ 表示互反 μ 函数偶．由定义易见，每一个形式幂级数 $\sum a_k z^k (a_0\neq 0)$，或者说，每一串实数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots (a_0\neq 0)$，都唯一地确定一个互反 μ 函数偶$\{\mu_1, \mu_2\}$．

$\{\zeta, \mu\}$ 自然是 Ω 上一个最简单最特殊的互反 μ 函数偶，它显然是由数列 $a_0=a_1=1$, $a_k=0 (k=2, 3, \cdots)$所确定的．

有了互反 μ 函数偶的一般概念之后，我们就有可能建立一般性的互反公式的定理了.

定理 5 假设 Ω 是一个含最小元 α 的局部有限半序集. 那么 Ω 上的每一个互反 μ 函数偶 $\{\mu_1, \mu_2\}$ 都对应地确定着如下的一对互反公式:

$$f(y)=\sum_{x\le y}\mu_1(x, y)g(x), \tag{4.22}$$

$$g(y)=\sum_{x\le y}\mu_2(x, y)f(x), \tag{4.23}$$

此处 $y\in\Omega$, 而 f 与 g 为以 Ω 为定义域的数值函数.

证明 首先注意，根据互反 μ 函数偶的定义，不难得出 μ_1 与 μ_2 在结合代数中的乘积为

$$\mu_1\mu_2=\phi(\lambda)\phi(\lambda)^{-1}=a_0b_0\lambda^0=\delta,$$

即 μ_1 与 μ_2 在代数中确实互为逆函数. 事实上仔细说来, Ω 既是局部有限半序集,则对任何截段 $[x, y]$ 说来，按照(4.20)、(4.21)展出的级数都只含有限多个项，故根据结合代数中的乘法结合律(或者关于 λ 的指数律)及关于有限多项的分配律,便立即得知 $\phi(\lambda)\phi(\lambda)^{-1}=\delta$ 成立.

现在我们来验证(4.23)⇒(4.22). 为此目的我们将已经成立的(4.23)代入(4.22)式右端,并加以变形和简化,则得

$$\begin{aligned}\sum_{x\le y}\mu_1(x, y)\,g(x)&=\sum_{x\le y}\mu_1(x, y)\sum_{t\le x}\mu_2(t, x)f(t)\\&=\sum_{x\le y}\phi(\lambda)(x, y)\sum_{t\le x}\phi(\lambda)^{-1}(t, x)f(t)\\&=\sum_{t\le y}f(t)\sum_{t\le x\le y}\phi(\lambda)^{-1}(t, x)\cdot\phi(\lambda)(x, y)\\&=\sum_{t\le y}f(t)\{\phi(\lambda)^{-1}\cdot\phi(\lambda)(t, y)\}\\&=\sum_{t\le y}f(t)\delta(t, y)=f(y).\end{aligned}$$

这表明从(4.23)可以推出(4.22). 又因(4.22)与(4.23)形式

上是对等的，所以完全同样地可以验证(4.22)⇒(4.23)．

根据对偶原则我们还有下述定理．

定理6 假设Ω是一个含有最大元的局部有限半序集．那么，Ω上每一个互反μ函数偶$\{\mu_1, \mu_2\}$都对应着如下的一对互反公式：

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\geq y}\mu_1(y, x)g(x), & (4.24)\\ g(y)=\sum\limits_{x\geq y}\mu_2(y, x)f(x), & (4.25)\end{cases}$$

此处$y\in\Omega$，而g与f为数值函数．

以后我们总规定把一个幂级数$\phi(\lambda)=\sum\limits_{0}^{\infty}a_k z^k$中的非零常数项$a_0$写成$a_0 z^0$，因而相应地便有$\phi(\lambda)=a_0\lambda^0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots(a_0\neq 0)$，按此记法，$e^\lambda$，$\cos\lambda$便分别表示

$$e^\lambda=\lambda^0+\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2+\frac{1}{3!}\lambda^3+\cdots,$$

$$\cos\lambda=\lambda^0-\frac{1}{2!}\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4-\cdots,$$

由于互反公式(4.22)、(4.23)也可写作

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leq y}\phi(\lambda)(x, y)\cdot g(x), & (4.22')\\ g(y)=\sum\limits_{x\leq y}\phi(\lambda)^{-1}(x, y)\cdot f(x), & (4.23')\end{cases}$$

因为每一个带有非零常数项的幂级数$\phi(z)$都有形式逆$\phi(z)^{-1}$，从而都决定一对反演公式(4.22′)、(4.23′)．所以上述类型的互反公式真是多至无穷．如果进一步分析，既然每一对公式(4.22)、(4.23)(或(4.22′)、(4.23′))都由一串实数$a_0, a_1, a_2\cdots(a_0\neq 0)$所一意地确定，那么互反公式同实数序列$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$构成一一对应．而全体实数序列(即使是$a_0\neq 0$的)所成的集合的基数显然是$2^{\aleph_0}$，即同于全体实数的基数，所以形如(4.22)、(4.23)的互反公式对的基数亦然．

例 8 设半序集 Ω 具有最小元，则在其上有互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} e^{\lambda}(x,\ y)\cdot g(x), \\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} e^{-\lambda}(x,\ y)\cdot f(x), \end{cases}$$

设 Ω 含有最大元，则有互反公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\geqslant y} e^{\lambda}(y,\ x)\cdot g(x), \\ g(y)=\sum\limits_{x\geqslant y} e^{-\lambda}(y,\ x)\cdot f(x). \end{cases}$$

例 9 设 Ω 含最小元，则有反演公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} \cos\lambda(x,\ y)\cdot g(x), \\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} \sec\lambda(x,\ y)\cdot f(x). \end{cases}$$

但并不存在反演公式

$$\begin{cases} f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} \sin\lambda(x,\ y)\cdot g(x), \\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y} \operatorname{cosec}\lambda(x,\ y)\cdot f(x), \end{cases}$$

请读者试思其故.

互反 μ 函数偶 $\{\mu_1,\ \mu_2\}=\{\phi(\lambda),\ \phi(\lambda)^{-1}\}$ 可以随意从一个实数列出发去构造，方法如下．例如给定一个 μ_1:

$$\mu_1=a_0\lambda^0+a_1\lambda+a_2\lambda+\cdots \quad (a_0\neq 0),$$

欲求

$$\mu_2=\mu_1^{-1}=b_0\lambda^0+b_1\lambda+b_2\lambda^2+\cdots,$$

则按方程组

$$\begin{cases} a_0b_0=1, \\ a_0b_1+a_1b_0=0, \\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

可逐步确定 $b_0=1/a_0,\ b_1,\ b_2,\ \cdots$ 的数值．譬如，假定已经算出 $b_0,\ b_1,\ \cdots,\ b_k$ 的值，则 b_{k+1} 便可按下式计算:

$$b_{k+1}=-\frac{1}{a_0}(a_1b_k+a_2b_{k-1}+\cdots+a_{k+1}b_0),$$

以后称 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 为一对"共轭数列"。关于一般互反公式较有趣味的具体例子，将在下节中给出。

§4　一般互反公式的推论及举例

令 α 为一异于零的实数。今取 $\phi(z)=(1+z)^{\alpha}$，则

$$1/\phi(z)=(1+z)^{-\alpha}=\sum_{0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}z^k\quad(|z|<1).$$

于是根据定理 5，我们有如下的命题。

推论 1　设 Ω 是一个含有最小元的半序集；则互反公式 (4.22)、(4.23) 对如下的一对特殊的互反 μ 函数 $\{\mu_1,\ \mu_2\}$ 是恒成立的：

$$\mu_1=\phi(\lambda)=\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}\lambda^k,\tag{4.26}$$

$$\mu_2=\phi(\lambda)^{-1}=\sum_{k\geq 0}\binom{-\alpha}{k}\lambda^k.\tag{4.27}$$

这个推论包含了广义 Möbius 反演公式 (4.12)、(4.13) 作为其特例，因为当 $\alpha=1$ 时按 (4.26)、(4.27) 所确定出的互反 μ 函数偶 $\{\mu_1,\ \mu_2\}$ 恰好就是 $\{\zeta,\ \mu\}$。

又当 $\alpha=m$（正整数）时，上述推论 1 便给出了 m 次重迭和式

$$f(y)=\sum_{x\leq x_1}\sum_{x_1\leq x_2}\cdots\sum_{x_{m-1}\leq y}g(x),\tag{4.28}$$

$$g(y)=\sum_{x\leq y}\mu_2(x,\ y)f(x).\tag{4.29}$$

请读者自行检验这一论述（注意 $(1+\lambda)^m(x,\ y)=\zeta^m(x,\ y)$，它表示从 x 到 y 的长度为 m 的链的个数）。

为了得到一批关于算术函数的互反公式，我们取按大小关系作为序关系的自然数集作为 Ω，即 $\Omega=\{1, 2, 3, \cdots\}$。显然这是个有最小元的局部有限的全序集。对于任意一对正整数 a 与 $b(a\leqslant b)$，易见所有长度为 k 的形如 $a=\gamma_0<\gamma_1<\cdots<\gamma_k=b(\gamma_i\in\Omega)$ 的真链个数是

$$\lambda^k(a, b)=\binom{b-a-1}{k-1}, \tag{4.30}$$

这是因为每一条真链相当于从整数 $a+1, a+2, \cdots, b-1$ 中取出 $k-1$ 个数 $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_{k-1}$ 的一个组合。于是任意给定一对共轭数列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ $(a_0\neq 0)$，我们都有自然数集 Ω 上的一对互反 μ 函数

$$\mu_1(a, b)=\sum_{k\geqslant 0}\binom{b-a-1}{k-1}a_k,$$

$$\mu_2(a, b)=\sum_{k\geqslant 0}\binom{b-a-1}{k-1}b_k.$$

此处我们对二项系数的记法采取如下的规定：

$$\binom{-1}{-1}=\binom{0}{0}=1, \binom{-1}{n}=\binom{n}{-1}=0 \quad (n\neq -1).$$

既然 $\lambda^k(a, b)$, $\mu_1(a, b)$, $\mu_2(a, b)$ 诸数值只依赖于差数 $b-a$，所以不妨简记 $\lambda^k(a, b)=\lambda^k(b-a)$, $\mu_1(a, b)=\mu_1(b-a)$, $\mu_2(a, b)=\mu_2(b-a)$。因此我们现在就把自然数集 Ω 上的互反 μ 函数偶定义成

$$\begin{aligned}\mu_1(s)&=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}a_k,\\ \mu_2(s)&=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}b_k,\end{aligned} \tag{4.31}$$

其中 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ 为满足条件 $(\sum a_kz^k)(\sum b_kz^k)\equiv 1$ $(a_0\neq 0)$ 的

任意一对共轭数列．于是，从定理 5 我们又得到下列推论．

推论 2 假设 $\mu_1(s)$ 与 $\mu_2(s)$ 为由 (4.31) 式所定义的一对互反 μ 函数，那么在自然数集上我们就有如下的一对互反公式：

$$f(s)=\sum_{t=1}^{s}\mu_1(s-t)g(t), \tag{4.32}$$

$$g(s)=\sum_{t=1}^{s}\mu_2(s-t)f(t). \tag{4.33}$$

不难看出，推论 2 还可推广到一般的局部有限的全序集上．今设 Ω 是一个具有最小元的局部有限的全序集，则其中的每个截段 $[x, y]$ 都可表成为有限长度的真链．可用 $r[x,y]$ 表示它的长度．类似于 (4.30) 我们同样有

$$\lambda^k(x, y)=\binom{r[x, y]-1}{k-1}.$$

因此，对于任意一对共轭数列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ $(a_0\neq 0)$，可以相应地引进 Ω 上的一对互反函数

$$\mu_1(x, y)=\sum_{k>0}\binom{r[x, y]-1}{k-1}a_k, \tag{4.34}$$

$$\mu_2(x, y)=\sum_{k>0}\binom{r[x, y]-1}{k-1}b_k, \tag{4.35}$$

于是可将推论 2 扩充成下述定理．

定理 7 假设 Ω 是一个含有最小元的局部有限的全序集，$\{\mu_1, \mu_2\}$ 为定义在 Ω 上的具有形式 (4.34)、(4.35) 的互反 μ 函数偶；则如下的互反公式成立：

$$f(y)=\sum_{x\leqslant y}\mu_1(x, y)g(x), \tag{4.36}$$

$$g(y)=\sum_{x\leqslant y}\mu_2(x, y)f(x), \tag{4.37}$$

此处 $y\in\Omega$，而 g 与 f 为数值函数．

实质上这仍然是定理 5 的一个推论．它同定理 5 比较起来，主要是关于 μ_1, μ_2 中出现的关联函数 λ 有了更具体的表示式，当然只是对于全序集才能有这种简单而具体的表示形式．

应用推论 2 可以导出一系列有关算术函数（即定义在整数集上的函数）的反演公式，这些反演公式中的若干公式还具有组合分析学的特征．无疑，它们对数列变换问题与级数求和问题会是有用的．

例 10 取 $\phi(z)=e^z=\sum_0^\infty z^k/k!$，则 $\phi(z)^{-1}=\sum_0^\infty(-z)^k/k!$，故得共轭数列 $a_k=1/k!$, $b_k=(-1)^k/k!$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$．于是根据(4.31)可得

$$\begin{aligned}\mu_1(s)&=\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}\binom{s-1}{k-1},\\ \mu_2(s)&=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{k!}\binom{s-1}{k-1},\end{aligned}\tag{4.38}$$

其中 $s\geqslant 1$，于 $s=0$，我们规定 $\mu_1(0)=\mu_2(0)=1$．

我们知道，有所谓"超比级数"或"超比函数"，其一般定义为

$${}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p\\ \rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_q\end{matrix}; z\right]=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha_1)_n(\alpha_2)_n\cdots(\alpha_p)_n}{n!(\rho_1)_n\cdots(\rho_q)_n}z^n,$$

此处 $(\alpha)_n$ 的定义是 $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$，$(\alpha)_0=1$，$(0)_0=1$．这类函数的重要性是物理科学工作者尽人皆知的．特别 $p=q=1$ 所相应的函数叫 Pochhammer-Barnes 的**合流超比函数**，可记作

$${}_1F_1(\alpha, \beta; z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(\alpha)_n}{n!(\beta)_n}z^n.\tag{4.39}$$

读者不难自行验证，按(4.38)式给出的 $\mu_1(s)$ 与 $\mu_2(s)$ 可

以表示成合流超比函数，即当 $s\geqslant 1$ 时有

$$\mu_1(s)={}_1F_1(1-s,\ 2;\ -1),$$

$$-\mu_2(s)={}_1F_1(1-s,\ 2;\ 1).$$

因此应用推论 2，我们便获得如下的一对反演公式：

$$f(s)=g(s)+\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t,\ 2;\ -1)g(t), \quad (4.40)$$

$$g(s)=f(s)-\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t,\ 2;\ 1)f(t), \quad (4.41)$$

其中 $s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$；又 $\sum\limits_{0}^{1}$ 表示和式不存在。

同理，假如取 $\phi(z)=e^{\alpha z}$ $(\alpha\neq 0)$，则相应的共轭数列为 $a_k=\alpha^k/k!$ 与 $b_k=(-\alpha)^k/k!$。于是类似地可得一对互反公式

$$f(s)=g(s)+\alpha\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t,\ 2;\ -\alpha)g(t), \quad (4.42)$$

$$g(s)=f(s)-\alpha\sum_{t=1}^{s-1}{}_1F_1(1-s+t,\ 2;\alpha)f(t). \quad (4.43)$$

(4.40) 与 (4.41) 相当于 $\alpha=1$ 的情形。

例 11 将 $\phi(z)$ 取为 Bernoulli 数的发生函数

$$\phi(z)=z/(e^z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}B_kz^k,$$

其中 B_k 即为熟知的 Bernoulli 数 $\left(B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\ B_2=\frac{1}{6}, B_3=B_5=B_7=\cdots=B_{2n+1}=\cdots=0, B_4=-\frac{1}{30},\ B_6=\frac{1}{42},\cdots\right)$，显见 $\phi(z)$ 的逆级数为

$$\phi(z)^{-1}=\frac{1}{z}(e^z-1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(k+1)!}z^k.$$

于是，根据 (4.31) 我们得到如下的一对特殊的互反 μ 函数：

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}\frac{1}{(k+1)!},$$

$$\mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}\frac{B_k}{k!}.$$

以此代入(4.32)、(4.33)也就得出一对特殊的互反公式.

例 12 将 $\phi(z)$ 取为 Euler 数的发生函数

$$\phi(z)=\sec z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}E_{2k}\cdot z^{2k},$$

则 $\phi(z)^{-1}=\cos z$, 从而仿例 11, 根据(4.31)又可获得如下的一对互反 μ 函数:

$$\mu_1(s)=\sum_{k\geq 0}\binom{s-1}{2k-1}\frac{(-1)^k}{(2k)!},$$

$$\mu_2(s)=\sum_{k\geq 0}\binom{s-1}{2k-1}\frac{E_{2k}}{(2k)!}.$$

以此代入(4.32)、(4.33)又可得到一对互反公式,它们实质上可以看作是例 9 中的一对互反公式的特殊化与具体化.

例 13 假设 $g_k(z)$ 为由下列超比函数所界定的 Mittag-Leffler 多项式:

$$g_k(z)=2z\quad {}_2F_1(1-k,1-z;\ 2;\ 2).$$

这样的多项式具有如下的发生函数(其中 $g_0(z)\equiv 1$):

$$\phi(w)=(1+w)^z(1-w)^{-z}=1+\sum_{k=1}^{\infty}g_k(z)w^k.$$

考虑 $\phi(w)^{-1}$ 便可得到一对共轭数列 $\{g_k(z)\}$ 与 $\{(-1)^k g_k(z)\}$, 其中 z 作为参数看待, 于是我们又得到一对特别的互反 μ 函数

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}g_k(z),$$

$$\mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{s-1}{k-1}(-1)^k g_k(z).$$

同时，又可将它们代(4.32)、(4.33)而寻出一对特别的互反公式.

总而言之，公式(4.32)、(4.33)可以容许无限多种的特殊化(具体化)，而且能够使它们同一些特殊多项式或知名数列联系起来.

例 14 令 α 与 β 为异于零的实数，则由 $\phi(z)=(1+\beta z)^{\alpha}$ 与 $\phi(z)^{-1}$ 的幂级数展式的系数所得出的共轭数列为 $a_k=\binom{\alpha}{k}\beta^k$, $b_k=\binom{-\alpha}{k}\beta^k$. 因而推论 1 中的(4.26)、(4.27)还可换为略较一般的形式

$$\mu_1=\sum_{k\geqslant 0}\binom{\alpha}{k}\beta^k\lambda^k, \tag{4.44}$$

$$\mu_2=\sum_{k\geqslant 0}\binom{-\alpha}{k}\beta^k\lambda^k. \tag{4.45}$$

再根据(4.31)，就得到如下的一对特殊的互反 μ 函数 ($\mu_1(0)=\mu_2(0)=1$)：

$$\mu_1(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{\alpha}{k}\binom{s-1}{k-1}\beta^k,$$

$$\mu_2(s)=\sum_{k=0}^{s}\binom{-\alpha}{k}\binom{s-1}{k-1}\beta^k.$$

容易验明，这一对函数可用 Gauss 的超比函数表示出来，即于 $s\geqslant 1$ 时有

$$\mu_1(s)=\alpha\beta\quad {}_2F_1(1-\alpha,\ 1-s;\ 2;\ \beta), \tag{4.46}$$

$$\mu_2(s)=-\alpha\beta\quad {}_2F_1(1+\alpha,\ 1-s;\ 2;\ \beta). \tag{4.47}$$

于是根据推论 2 便有如下的一对互反公式：

$$f(s)=g(s)+\alpha\beta\sum_{t=1}^{s-1}{}_2F_1(1-\alpha,\ 1-s+t;\ 2;\ \beta)g(t), \tag{4.48}$$

$$g(s)=f(s)-\alpha\beta\sum_{t=1}^{s-1}{}_2F_1(1+\alpha,\ 1-s+t;2;\beta)f(t),\quad(4.49)$$

其中 $s=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$.

特别于 $\beta=1$ 时, (4.46)、(4.47) 即化为异常简单的表示式

$$\mu_1(s)=(-1)^s\binom{-\alpha}{s},\quad \mu_2(s)=(-1)^s\binom{\alpha}{s}.$$

从而(4.48)、(4.49)便给出如下的简单特例(其中将原来的 $f,\ g$ 换为 $(-1)^t f(t),\ (-1)^t g(t)$):

$$f(s)=\sum_{t=1}^{s}\binom{\alpha}{s-t}g(t),\quad(4.50)$$

$$g(s)=\sum_{t=1}^{s}\binom{-\alpha}{s-t}f(t),\quad(4.51)$$

这对互反公式我们以前提到过了(见第一章).

以上所举各例, 都是些应用推论 2 与推论 1 所能导出的特例. 在这些特例中, 因为假定的是自然数按其大小次序作成的全序集, 所以使得关联函数 $\lambda^k(a,\ b)$ 的计算特别简单. 如果按整除关系来定义序关系, 则自然数集真正成为半序集, 而 $\lambda^k(a,\ b)$ 也便不再有简单的表示式, 因而也就没有象(4.31)那样形式简洁的 μ 函数偶. 在这样的半序集上构造例子, 形式必然复杂, 为节省篇幅, 这里就不去讲述这种例子了.

§5 理论的补充及扩充

我们在第三节中曾经借助于关联函数 λ 的幂级数展式来规定一般互反 μ 函数偶的概念. 正如前面早已指出的, 我们之所以这样做, 完全是受着原始的一对互逆函数 $\{\zeta,\ \mu\}$ 结构

形式的启发. 然而深思的人们还必然会进一步提出疑问: 为什么一定要通过 λ 的幂级数来界定 μ 函数偶呢? 当然, 我们曾经发现用 λ 的幂级数去表现互反 μ 函数确是有很大优点的: 第一, λ 具有一种"幂零性质", 即当 k 大于截段 $[x, y]$ 内的元素个数时, 便有 $\lambda^k(x, y)=0$; 因而对局部有限的半序集说来, 关于互反函数 $\mu_1(x, y)$, $\mu_2(x, y)$ 的幂级数实际上都退化为有限多个项的多项式. 第二, 每个项 $a_k\lambda^k(x, y)$ 中的 $\lambda^k(x, y)$ 都表示长度为 k 的真链 $x<\cdots<y$ 的个数, 因而便于作具体计算.

但是, 略经分析即可看出, 利用 λ 去界定 μ_1, μ_2 实际并无必要性, 我们完全可以借助于任何一个具有幂零性质的函数, 例如 σ 去定义 μ_1 和 μ_2.

假设 σ 是半序集 Ω 上的结合代数中的一个二元函数, 当 $x\not<y$ 时 $\sigma(x, y)=0$, 并且对于每一截段 $[x, y]$ 而言都存在一个与 x, y 有关的正整数 $N=N(x, y)$, 使得当 $k\geqslant N$ 时恒有幂零性质 $\sigma^k(x, y)=0$.

又再规定 $\sigma^0=\lambda^0=\delta$, 因而 σ 在结合代数中便满足指数定律 $\sigma^m\cdot\sigma^n=\sigma^{m+n}(m\geqslant0,\ n\geqslant0)$.

于是, 对应每一对共轭数列 $\{a_k\}$ 与 $\{b_k\}$ $(a_0\neq0)$, 我们都有如下的一对广义的互反 μ 函数:

$$\mu_1(x, y)=\sum_{k\geq0} a_k\sigma^k(x, y)=\phi(\sigma)(x, y), \qquad (4.20')$$

$$\mu_2(x, y)=\sum_{k\geq0} b_k\sigma^k(x, y)=\phi(\sigma)^{-1}(x, y). \qquad (4.21')$$

与此同时, 定理 5 便可扩充成下列形式.

定理 5′ 假设 Ω 是一个含有最小元的局部有限的半序集, 那么, 对应于按(4.20′)、(4.21′)确定的每一对互反 μ 函数 $\{\mu_1, \mu_2\}\equiv\{\phi(\sigma), \phi(\sigma)^{-1}\}$ 都存在如下的一对互反公式:

$$f(y)=\sum_{x\leqslant y}\phi(\sigma)(x,\ y)\cdot g(x),\tag{4.22'}$$

$$g(y)=\sum_{x\leqslant y}\phi(\sigma)^{-1}(x,\ y)\cdot f(x).\tag{4.23'}$$

证法完全与定理 5 相同，事实上根据结合代数中的乘法结合律或指数律以及有限个项的分配律，我们同样有

$$\phi(\sigma)\phi(\sigma)^{-1}=a_0b_0\sigma^0=\delta.$$

具有幂零性质的函数 σ 确实是很多的，例如任何一个不含零幂项的 λ 的多项式或幂级数

$$\sigma=c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_n\lambda^n+\cdots$$

都是具有幂零性质的函数．特别，$\sigma=\sin\lambda$ 就是具有这种性质的一个函数．

例 15 在例 8 的同样条件下有如下一对互反公式：

$$\begin{cases}f(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^{\sin\lambda}(x,\ y)\cdot g(x),\\ g(y)=\sum\limits_{x\leqslant y}e^{-\sin\lambda}(x,\ y)\cdot f(x).\end{cases}$$

显然，定理 5′ 比定理 5 具有更高的概括性；但它仍然是以定理 5 为背景（抓住 λ 的幂零性的特征）抽象出来的．

第 5 章

Pólya 计数理论及其应用

本章中将系统讲述 Pólya 的计数理论和它的应用. 扼要说来, Pólya 计数定理是关于枚举各种计数对象 (有限结构) 的一个普遍公式. 它是由匈牙利数学家 Pólya 在经过分析若干实例之后, 把发生函数工具、群论观点(Burnside 引理)和权的概念三者结合在一起建立起来的一个优美定理. 这里所说的"优美", 主要是指其方法的构思和表现形式而言, 至于涉及到用公式所作的具体计算那还是相当复杂的. 诚如 F.Harary 在他的"图论"一书中所说的: "组合数学中的计数方法与其说是一种科学, 还不如说它是一种艺术; 随着更一般的和更有力的观点和技巧的发现和发展, 可以期望这种情况将能改变过来". 但就目前而言, 带有一定"艺术性"的 Pólya 计数理论仍然是在图论和其它领域中用以解决许多计数问题的有力工具.

§1 群的有关知识

为帮助初学者能读懂本章, 本节中先介绍一下本章所需的有关群的基本知识. 要讲述群的定义和有关性质, 某些性质将给出证明, 为节省篇幅, 所有地方均不举例.

(一) 群、子群和陪集

一个非空的元素集合 G, 在它上面定义了一个二元运算,

对 G 中任两元素 α, β, 以 $\alpha\beta$ 来记此运算, 并称之为"乘法". 乘法需满足下面四条公理, 方称 G 为"群":

公理 1 (封闭性) 对任何 $\alpha\in G$, $\beta\in G$, 均有 $\alpha\beta\in G$.

公理 2 (结合性) 对任何 $\alpha,\beta,\gamma\in G$, 有 $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$.

公理 3 (单位元素) G 中有一个元素 e, 使对所有的 $\alpha\in G$, 均有 $e\alpha=\alpha e=\alpha$, e 称为群 G 的"单位元素".

公理 4 (逆元素) 对任何 $\alpha\in G$, 有 G 中的一个元素, 记作 α^{-1}, 使 $\alpha\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\alpha=e$. α^{-1} 称为 α 的"逆".

如果群的元素个数有限, 则此群称为是"有限的", 否则称为是"无限的", 以 $|G|$ 表示有限群的元素个数, 并称 $|G|$ 为此群的"阶". 一个群 G, 若对任何 α, $\beta\in G$, 皆有 $\alpha\beta=\beta\alpha$, 则说是乘法满足交换律. 一般来讲, 乘法不一定是满足交换律的, 对于乘法满足交换律的群称为"**交换群**"(或 Abel 群), 否则称为"**非交换群**".

假定 G 是一个群, 对 G 的子集 $G_1\subset G$, 如果在原来的乘法运算下, G_1 也是一个群, 则称 G_1 为 G **的子群**.

一个 n 阶群 G, 如果 G 中有一个元素 α, 使得 G 的所有元素能表成形式:

$$e=\alpha^0=\alpha^n,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^{n-1},$$

则 G 称为是由元素 α 所生成的群, 这种群也称为是 n 阶"**循环群**". 其中 α 称为群的生成元.

对有限群 G 的任何一元 α, 必有正整数 n, 使得 $\alpha^n=e$, 且对任何小于 n 的正整数 m, 均有 $\alpha^m\neq e$, 称 n 为元素 α 的"阶". 假定 α 的阶为 n, 则 $\{\alpha^0,\ \alpha^1,\ \cdots,\ \alpha^{n-1}\}$ 即是由 α 所生成的 G 的一个 n 阶子群.

设 $G_1=\{e,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\}\subset G$, 是 G 的一个固定的子群, 对任何 $\beta\in G$, 集合

$$\beta G_1 = \{\beta e,\ \beta\alpha_1,\ \beta\alpha_2,\ \cdots\}$$

称为由 β 所导出的子群 G_1 的一个左陪集．类似地可以定义右陪集 $G_1\beta$．显然，陪集中元素的个数恒等于子群的阶．由 e 所导出的陪集与子群本身重合，即

$$eG_1 = G_1 e = G_1.$$

G 是一个 n 阶群，G_1 是它的一个子群，如果 $G_1 \neq G$，任取一个 $\beta_1 \in G - eG_1$，作出一个陪集 $\beta_1 G_1$．如果 eG_1 和 $\beta_1 G_1$ 仍不穷尽整个 G，则再在群 G 中任取一个不属于此二陪集的元素 β_2，同时造出陪集 $\beta_2 G_1$，依此下去，因为 $|G| = n < \infty$，所以最后总可得到一串左陪集

$$eG_1 = G_1,\ \beta_1 G_1,\ \beta_2 G_1,\ \cdots,\ \beta_{k-1} G_1,$$

使得它们的总集就是整个的 G，即

$$G = eG_1 \cup \beta_1 G_1 \cup \beta_2 G_1 \cup \cdots \cup \beta_{k-1} G_1, \qquad (5.1)$$

甚易证明这些陪集是两两不相交的．事实上，对 $\beta_i G_1$ 和 $\beta_j G_1$（记 $\beta_0 = e$，且假定 $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$）中的任何二元 $\beta_i\alpha_1$，$\beta_j\alpha_2$，如果

$$\beta_i\alpha_1 = \beta_j\alpha_2,$$

则
$$\beta_j = \beta_i\alpha_1\alpha_2^{-1} \in \beta_i G_1,$$

此与 β_j 的选法相矛盾．由此据(5.1)式即知

$$|G| = |G_1| + |\beta_1 G_1| + \cdots + |\beta_{k-1} G_1| = k|G_1|.$$

据此即可推出：有限群的任何子群的阶均为原来群的阶的因子（Lagrange 定理）．特别，由于群 G 的任何 α 均可生成一个与 α 的阶相同的循环子群，从而得知 α 的阶亦必为群的阶的因子．

由等式(5.1)所表示的一个分解称为是群 G 关于子群 G_1 的一个"左分解"．其中 $(e,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{k-1})$ 称为与此分解相应的代表元．由于对任取的 $\beta \in \beta_i G_1$，总有

$$\beta G_1 = \beta_i G_1,$$

所以作为每个陪集的代表元可以从该陪集中任意地取．这同时也就容易看出，任何两个左分解之间，除开可能差一个加项之间的置换之外是完全唯一的．类似地可以定义"右分解"．

(二)关于子群的一个定理

定理 1 假定 G 是一个有限群，对 G 的任何非空子集 E，只要 E 中元素对乘法运算也封闭，则 E 便是 G 的子群．

证明 按假设，E 满足公理 1，又公理 2 显然满足．任取 $\alpha \in E$，由于对任何正整数均有 $\alpha^m \in E$ 及 $|G| < \infty$，知必有 $m \leqslant n$，使 $\alpha^m = \alpha^n$，于是 $e = \alpha^{n-m} \in E$，此即 E 满足公理 3．这同时证明了对任何 $\alpha \in E$，有正整数 n_0 使 $\alpha^{n_0} = e$．由于 $\alpha(\alpha^{n_0-1}) = (\alpha^{n_0-1})\alpha = \alpha^{n_0} = e$，从而 $\alpha^{-1} = \alpha^{n_0-1} \in E$，这就证明了 E 也满足公理 4，于是 E 为群．

(三)作用在 X 上的群

假定 G 是一个有限群，X 是一个抽象集合．如果对每个 $\alpha \in G$，对应了一个从 X 到它自身的一一映射，记作 $\alpha(x)$ 满足：

1) $e(x) \equiv x$;

2) $\alpha\beta(x) = \alpha[\beta(x)]$，对任何 $\alpha, \beta \in G$, $x \in X$,

则称 G 是作用在集合 X 上的群．

如果 G 是作用在 X 上的群，对每个 $x \in X$，令

$$\theta(x) = \{\alpha(x) \mid \alpha \in G\},$$

称 $\theta(x)$ 为 x 所在的"轨"，简称为"x 的轨"．x 的轨即 x 在所有映射 α 之下的像的集合．由于 G 是群．及"作用"的定义，易证当 $y \in \theta(x)$ 时也有 $x \in \theta(y)$，因此可以谈及 x 与 y 同轨，且易见如此定义的 X 中元素的同轨性是一种等价关系．即具有反身性、对称性和传递性．从而整个 X 可以分成若干个

不相交的轨的并. 令

$$G(x)=\{\alpha|\alpha\in G,\ \alpha(x)=x\},$$

此即使 x 不变的那些映射 α 的集合, 称 $G(x)$ 为 x 的"稳定核". 容易验证 $G(x)$ 是群, 从而是 G 的子群.

假定 G 是有限群, 设

$$\theta(x)=\{x=\varepsilon(x),\ x_1=\alpha_1(x),\ \cdots,\ x_{k-1}=\alpha_{k-1}(x)\}.$$

对任何 $\alpha\in G$, 必有某个 i, 使 $\alpha(x)=x_i=\alpha_i(x)$, 于是

$$\begin{aligned}\alpha_i^{-1}\alpha(x)&=\alpha_i^{-1}[\alpha(x)]=\alpha_i^{-1}[\alpha_i(x)]\\&=\alpha_i^{-1}\alpha_i(x)=\varepsilon(x)=x.\end{aligned}$$

由此 $\alpha_i^{-1}\alpha\in G(x)$. 于是 $\alpha=\alpha_i(\alpha_i^{-1}\alpha)\in\alpha_iG(x)$. 这是证明了

$$G=\varepsilon G(x)\cup\alpha_1G(x)\cup\cdots\cup\alpha_{k-1}G(x)$$

是 G 关于子群 $G(x)$ 的一个左分解. 由此直接推得

定理2 假定 G 是作用在集合 X 上的有限群, 则对于任何 $x\in X$, 恒有

$$|G|=|\theta(x)||G(x)|. \tag{5.2}$$

§2 置 换 群

从一个有限集 X 到它自身的一一映射称为一个置换. 映射的通常的复合, 构成了置换的乘法运算. 全体置换的集合在此乘法之下显然构成群, 称此群为"**对称群**". $|X|=n$ 称为对称群的"次"(或"度"). n 次对称群记作 S_n. 设 $G\subset S_n$, 若 G 中两置换的积仍属于 G, 则 G 便是 S_n的子群. 一般地, 凡是 n 次对称群的任何子群, 均称为 n 次"**置换群**". 特别, S_n 本身也是一个 n 次置换群, 它的阶是 $n!$. 由前节(三)可知, X 上的置换群就可以看作是作用在 X 上的群; 反之, 任何作用在 X 上的群, 均可(在同构的意义下)看成是 X 上的置换群.

不失一般性，可以将 X 取作数集$\{1, 2, \cdots, n\}$，于是对任何一个使得

$$\alpha(k)=i_k, \quad 1\leqslant k\leqslant n$$

的置换 α，可以记作

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

关于 α 的循环分解，置换的奇偶性等在高等代数中均有定义．又由代数中知，所有偶置换作成一群．记此群为 A_n，称为 n 次"交代群"，它有阶 $n!/2$．由置换

$$(1, 2, \cdots, n)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

生成的循环群特别称为 n 次"**循环群**"，记作 C_n，它的阶等于 n．

记 $\alpha=(1\,2\,\cdots\,n)$，$\beta=(1,n)(2,(n-1))\cdots$，以下证明

$$D_n=\{\alpha, \alpha^2, \cdots, \alpha^n, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \cdots, \beta\alpha^n\}$$

是一个群．称 D_n 为"**二面体群**"．在此场合，称 α, β 为生成元．

为叙述方便起见，此处暂时规定用$[k]$表示 k 关于模 n 的最小非负剩余，但当 $k=n$ 时，仍令$[n]=n$．

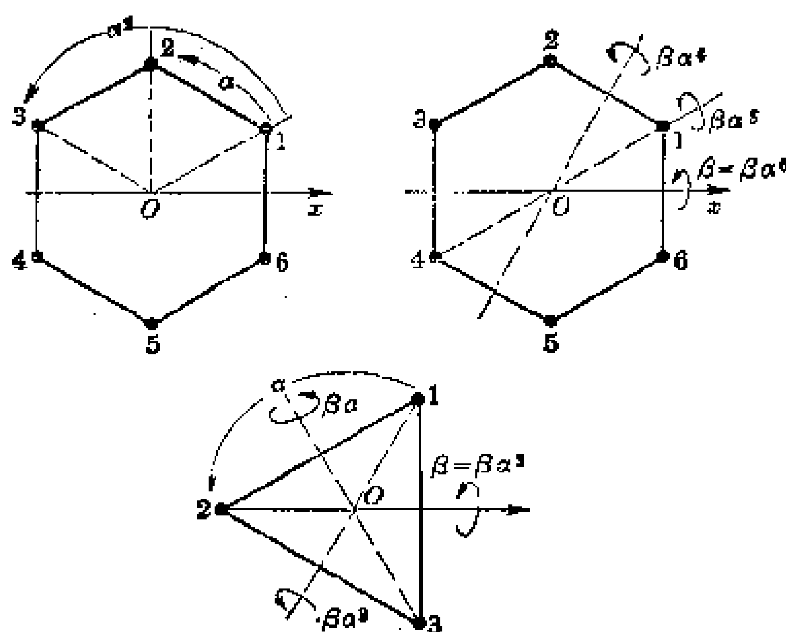
对 1, n 之间的任何两个整数 i, k,

$$\alpha^k(i)=[i+k],$$

$$\begin{aligned}\beta\alpha^k(i)&=n+1-[i+k]\\&=\begin{cases} n+1-i-k, & 当\ i+k\leqslant n, \\ 2n+1-i-k, & 当\ i+k>n, \end{cases}\end{aligned} \tag{5.3}$$

又 $\qquad \alpha^{n-k}\beta(i)=\alpha^{n-k}(n+1-i)=[2n+1-i-k],$

可见 $\qquad \beta\alpha^k=\alpha^{n-k}\beta,$



这表明 D_n 对乘法运算封闭(注意 $\beta^2=e$, 即 β 的阶为 2). 从而它是 n 次对称群的子群.

了解一下 C_n 和 D_n 的几何解释, 对我们理解这两种群将会有所帮助. 在平面上画定一个正 n 边形. 从某一顶点开始按逆时针方向将各顶点依次给予 1, 2, …, n 的编号. 将通过 n 边形的中心 O 与 1, n 两点连线中点的直线取作 x 轴, 将这个正 n 边形称为底盘. 现在设想有一个与底盘完全相同的正 n 边形(各顶点亦具有同样的编号)覆在底盘之上, 称为动盘. 使底盘保持不动, 让动盘在底盘上旋转或翻动后仍与底盘重合, 则动盘上标号为 i 的点必定重合在底盘上某个标号为 $f(i)$ 的点. 这样 f 本身就是一个 n 次置换. 现在让我们来探讨动盘的何种运动所对应的置换就恰好是 α^k 或 $\beta\alpha^k$. 取定过 O 点垂直于底盘所在平面的直线称为旋转轴. 十分明显, 让动盘围绕旋转轴按逆时针方向作弧度为 $\frac{2\pi}{n}$ 的旋转所得到的置换正是 α, 而如果作 $\frac{2k\pi}{n}$ 的旋转, 则所得到的置换

恰好就是α^k. 先令动盘作$\frac{2k\pi}{n}$的旋转，继之再作$\frac{2m\pi}{n}$的旋转，其效果无异于令动盘一次作$\frac{2(m+k)\pi}{n}$的旋转，而这就是$\alpha^m\alpha^k=\alpha^{m+k}$的鲜明的几何解释. 这同时也表明循环群$C_n$是一个交换群.

按照置换β的定义，它对应的无疑就是将动盘围绕x轴作180°的翻转(向上或向下).

在讨论置换$\beta\alpha^k$时，需分开两种情形. 首先，当n为奇数时，通过上面列出的关于$\beta\alpha^k(i)$的表达式(5.3)容易验证，对于偶数的k，$\beta\alpha^k$所对应的是动盘围绕过O点与底盘上标号为$\frac{n+1}{2}-\frac{k}{2}$的顶点连线为轴所作的翻转，而对于奇数的$k$，$\beta\alpha^k$所对应的则是动盘围绕过$O$点与标号为$n-\frac{k-1}{2}$的顶点连线为轴的翻转.

当n为偶数时，如果k也是偶数，则$\beta\alpha^k$所对应的是围绕过顶点$n-\frac{k}{2}$与顶点$n+1-\frac{k}{2}$连线的中点与O点的连线为轴的翻转，如果k是奇数，则$\beta\alpha^k$所对应的是围绕过O点与顶点$\frac{n+1}{2}-\frac{k}{2}$的连线为轴的翻转.

这样，由于n的奇偶性不同，就使得D_n中的n个置换$\beta\alpha^k$产生了很大的差异. 当n为奇数时，这n个置换$\beta\alpha^k$不管怎样皆是围绕某一顶点与中心连线的翻转，而当n为偶数时，n个置换$\beta\alpha^k$中有一半($\beta\alpha^1$, $\beta\alpha^3$, $\beta\alpha^5$, …)是围绕着一对对顶点连线的翻转，另一半($\beta\alpha^2$, $\beta\alpha^4$, $\beta\alpha^6$, …)却是围绕着一对对边中点连线的翻转. 搞清这种差异就为我们下面寻求D_n的循环指标作好了准备.

附带提一句，当$n\geqslant 3$时，D_n是非交换群.

§3 置换群的循环指标

对于任何一个 n 次置换 α，总可以分解成互不相交的 k_1 个 1-循环，k_2 个 2-循环，…，k_n 个 n-循环的乘积. 这时，我们说 α 是属于$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型的置换，其中

$$1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+n\cdot k_n=n.$$

顺便讲一下群的元素的共轭概念. 假定 G 是一个群，对于 G 的两元 α, β 称为是共轭的，如果存在一个 $\gamma\in G$，使

$$\gamma\alpha\gamma^{-1}=\beta.$$

在对称群中，对于两个元素 α, β 的共轭性有很简单的判别法则——α, β 是同型的. 事实上，假定 $\gamma\alpha\gamma^{-1}=\beta$，设 $(x_1x_2\cdots x_k)$是 α 的循环分解中的一个 k-循环，则在 β 的循环分解中必定有一个相应的 k-循环$(\gamma(x_1)\gamma(x_2)\cdots\gamma(x_k))$；反之，若 α, β 确是同型的，将 α, β 的循环分解从小到大按上下两行依次排好，假定对于 α 的某个 k-循环$(x_1x_2\cdots x_k)$所对应的 β 的 k-循环是$(y_1y_2\cdots y_k)$. 则令 $\gamma(x_i)=y_i(i=1, 2, \cdots, k)$. 对如此得到的 γ，容易验证 $\gamma\alpha\gamma^{-1}=\beta$.

以下用 $k_i(\alpha)$ 表示在置换 α 的循环分解中的 i-循环的个数.

假定 G 是一个 n 次置换群，令

$$C(G)=C(G; t_1, t_2, \cdots, t_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}\prod_{i=1}^{n} t_i^{k_i(\alpha)}, \qquad (5.4)$$

称如此的 n 个变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的多项式为群 G 的循环指标.

如果用 $C(k_1, k_2, \cdots, k_n)$表示在群 G 中属于型$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$的置换个数，则亦可将循环指标表成为一种等价形式：

$$C(G; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{(k)} C(k_1, k_2, \cdots, k_n) t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n}, \tag{5.5}$$

其中记号$(\boldsymbol{k})$表示向量$(\boldsymbol{k})=(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，它对应于$n$的这样的分拆：$1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+n\cdot k_n=n$，而记号$\sum_{(k)}$便表示对所有这种不同的分拆求和.

（一）n次对称群S_n的循环指标是

$$C(S_n) = \frac{1}{n!}\sum_{(k)} \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i!} t_1^{k_1} t_2^{k_2} \cdots t_n^{k_n}. \tag{5.6}$$

证法 1 由于$|S_n|=n!$，为证公式(5.6)，只须证明

$$C(k_1, k_2, \cdots, k_n) = n! \Big/ \prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i!.$$

对任何一个$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型的n次置换α，写出它的循环分解(按照循环长度由小到大的次序)，然后去掉所有循环中的括弧，我们便得到一个全排列. 在写α的循环分解时，由于k_i个i-循环之间有$k_i!$种不同的排列方法，又对每个i-循环，自身又有i种不同的表示办法，所以每个α按上述办法可以对应出$\prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i!$个不同的全排列. 由所有$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型的$n$次置换对应出的全排列恰好就是全排列的总集，它共包含$n!$个元素，由此得知此种类型的置换α共有$n!\Big/\prod_{i=1}^{n} i^{k_i} k_i!$个.

证法 2 对n的一个固定的分拆$(k)=(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，要想知道属于$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型的不同的$n$次置换共有多少个，可以这样设想：将正整数1到$n$分成有序的$k_1+k_2+\cdots+k_n$组，使得前$k_1$组各有一个元素，接下去$k_2$组各含两个元素，…，最后的$k_n$组各含$n$个元素，那么所有不同的分组方法数是

$$n!/(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\cdots(n!)^{k_n}.$$

要想使这种分组法变成无序的，那么总的分法数便是

$$n!/(1!)^{k_1}(2!)^{k_2}\cdots(n!)^{k_n}k_1!k_2!\cdots k_n!.$$

对于每一个取定的无序分组法，它所对应的$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型置换显然皆有$[(1-1)!]^{k_1}[(2-1)!]^{k_2}\cdots[(n-1)!]^{k_n}$个(由于$i$个不同元素组成的圆排列总数为$(i-1)!$个)。以此数乘上式即得所欲证。

（二）n次循环群C_n的循环指标是

$$C(C_n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\phi(d)t_d^{n/d}, \tag{5.7}$$

其中$\phi(d)$是Euler函数，它表示小于d而与d互质正整数的个数(规定$\phi(1)=1$)。

证明 任取一个α^k，假定$(k, n)=d'$，则对任何一个$1\leqslant i\leqslant n$，$\zeta_i=(i, \alpha^k(i), \cdots, \alpha^{(n/d'-1)k}(i))$便组成了$\alpha^k$的一个长度为$n/d'$的循环。当$i$跑过1到$d'$时，得到的所有$\zeta_i$便是置换$\alpha^k$的全部$d'$个$n/d'$-循环。这表明如此的$\alpha^k$是属于$[k_{n/d'}]$型的，其中$k_{n/d'}=d'$。为了计算$C_n$中属于此型的置换有多少个，只须计算满足等式$(k, n)=d'$的不超过$n$的正整数$k$有多少个。这又等价于计算使得$(k/d', n/d')=1$的正整数$k/d'(1\leqslant k/d'\leqslant n/d')$的个数，而这恰就是$\phi(n/d')$，由此可见

$$C(C_n)=\frac{1}{n}\sum_{d'|n}\phi(n/d')t_{n/d'}^{d'},$$

改变记号，令$n/d'=d$，可见这就是公式(5.6)。

（三）有了循环群的循环指标之后，要求二面体群D_n的循环指标就十分容易了。

事实上，D_n的阶为$2n$，它所包含的置换，除了C_n的全部n个置换之外，其余n个置换全部是翻转映射。当n为奇数时，这n个翻转映射分别是以不同的顶点和中心连线为轴的

翻转. 这样, 它们的循环分解都是有一个 1-循环和$(n-1)/2$个 2-循环, 由此立得

$$C(D_n)=\frac{1}{2}C(C_n)+\frac{1}{2}t_1t_2^{(n-1)/2}. \qquad (5.8)$$

当 n 为偶数时, 对于以一对对边中点连线为轴的翻转, 可以分解成 $n/2$ 个 2-循环的乘积; 对于以一对对顶点连线为轴的翻转可以分解为两个 1-循环和$(n-2)/2$个 2-循环的乘积, 这就表明

$$C(D_n)=\frac{1}{2}C(C_n)+\frac{1}{4}(t_2^{n/2}+t_1^2t_2^{(n-2)/2}). \qquad (5.9)$$

(四) n 次交代群 A_n 的循环指标是

$$C(A_n)=\frac{1}{n!}\sum_{(k)}\frac{n!\,[1+(-1)^{k_2+k_4+\cdots}]}{\prod\limits_{i=1}^{n}i^{k_i}k_i!}t_1^{k_1}t_2^{k_2}\cdots t_n^{k_n}. \qquad (5.10)$$

这个结果容易从对称群 S_n 的循环群的循环指标公式(5.5)推出.

设置换 α 属于$[k_1, k_2, \cdots, k_n]$型, 从高等代数知道, α 的奇偶性恰与它的定性数 $n-(k_1+k_2+\cdots+k_n)$的奇偶性相同. 记 $a=k_1+k_3+\cdots$, $b=k_2+k_4+\cdots$. 对等式 $1\cdot k_1+2\cdot k_2+\cdots+n\cdot k_n=n$ 两边模 2 取同余, 立见

$$a\equiv n \pmod 2).$$

从而$n-(a+b)\equiv b \pmod 2$, 可知 α 的奇偶性实与 b 的奇偶性相同. 再注意到 A_n 的阶为 $n!/2$, 由此从公式(5.5)即得公式(5.9).

(五) 最平凡的 n 次置换群是单位元素群, 它只由唯一的一个元素恒等置换 $e=(1)(2)\cdots(n)$所构成, 记作 E_n, 它的阶为 1. 而循环指标就是

$$C(E_n)=t_1^n. \qquad (5.11)$$

§4 Burnside 引理及其应用

为了给下节讲述 Pólya 定理作准备，需先来讲述属于 Burnside 的一个著名的引理，它给出了一个置换群所决定的轨的计数公式．它本身也可以用来解决某些较简单的轨的计数问题．

假定 G 是作用在 X 上的置换群，它有轨 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_n$．一般地，以 $N(G)$ 来记置换群 G 的轨的数目．此处即有 $N(G)=n$．对任何 $\alpha\in G$，令

$$F(\alpha)=\{x \mid x\in X,\ \alpha x=x\},$$

即 X 中在 α 作用之下不变的所有元素的集合．于是 $|F(\alpha)|$ 即是在 α 作用之下不变的元素的数目．当将 G 就看作是 X 上的置换群时，$|F(\alpha)|$ 恰就是在 α 的循环分解中出现的1-循环的数目．用前节的符号，这就是 $k_1(\alpha)$．轨的数目 $N(G)$ 可以用所有的 $|F(\alpha)|$ 来表示，这就是

Burnside 引理

$$N(G)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}|F(\alpha)|. \tag{5.12}$$

证明 假定 θ 是置换群 G 的固定一个轨，则对任何的 $x, y\in\theta$，由本章§1节定理2可知

$$\begin{aligned}|\theta|\,|G(x)|&=|\theta(x)|\,|G(x)|\\&=|G|=|\theta(y)|\,|G(y)|=|\theta|\,|G(y)|,\end{aligned}$$

由此已经可以推知，对同一轨中的任二元素其不变子群的元素个数一定相同（虽然一般来讲，未必有 $G(x)=G(y)$）．现在再来探讨一下这一事实的直观来由．若 $x, y\in\theta$，则必有 $\alpha\in G$ 使 $y=\alpha(x)$．对任何 $\beta\in G(x)$，有

$$\alpha\beta\alpha^{-1}(y)=\alpha\beta(x)=\alpha(x)=y,$$

这表明 $\alpha\beta\alpha^{-1}\in G(y)$，即有 $\alpha G(x)\alpha^{-1}\subset G(y)$；反向的包含关系亦可类似地证明，两相结合即得：$\alpha G(x)\alpha^{-1}=G(y)$。对此情形我们说子群 $G(x)$ 与 $G(y)$ 是相互"共轭的"。显而易见，共轭的子群有相同的阶。

现在以两种方式来计算满足条件 $\alpha x=x$ 的元素对(α, x)的个数，便得到

$$\sum_{\alpha\in G}|F(\alpha)|=\sum_{x\in X}|G(x)|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\theta_i}|G(x)|$$
$$=n|G|=N(G)|G|.$$

证毕。

有时候，根据不同需要在轨上定义一个数值函数 w，称为权。此时权也可看成是定义在 X 上的函数，这只要当 $x\in\theta_i$ 时令 $w(x)=w(\theta_i)$。下面的定理给出了关于轨的权的和的计算公式：

定理 3

$$\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}\sum_{x\in F(\alpha)}w(x). \qquad (5.13)$$

当所有的权恒等于1时，这实际上就是公式(5.12)，因此它可以看作是 Burnside 引理的推广，证明几乎同引理完全一样：

$$\sum_{\alpha\in G}\sum_{x\in F(\alpha)}w(x)=\sum_{x\in X}\sum_{\alpha\in G(x)}w(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{x\in\theta_i}\sum_{\alpha\in G(x)}w(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i)\Big(\sum_{x\in\theta_i}|G(x)|\Big)$$
$$=|G|\sum_{i=1}^{n}w(\theta_i).$$

下面两个例子表明了 Burnside 引理在推导圆排列公式及项链公式方面的应用.

例 1(圆排列公式) 假定 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r\}$ 是任意的抽象集合,由 Ω 中任取 n 个元素(可以重复)所作的排列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 围成一圈,即说是一个圆排列. 这样,定义在 $D=\{1, 2, \cdots, n\}$ 而在 Ω 中取值的每一个函数 f 就代表(或能作成)一个圆排列,但须注意,凡是经过一个"推移"可以变成相同的两个函数所代表的是同一个圆排列. 以 Ω^D 表示定义于 D 而取值于 Ω 中的所有函数的集合,于是我们可将圆排列的精确定义写作

定义 1 集合 Ω^D 在 n 次循环群 C_n 作用下的每一条轨称为是一个圆排列.

其中 C_n 对 Ω^D 的作用是这样定义的:对任何 $\alpha\in G_n$, $f\in\Omega^D$, $\alpha f(x)=f(\alpha x)$, $x\in D$. 现在让我们用 Burnside 引理来证明下述的关于圆排列总数的公式.

公式 1 r 个元素允许重复取 n 个所作成的圆排列的总数,即集合 Ω^D 在群 C_n 作用下的轨的数目是

$$N(n, r)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r^{(k,n)}. \qquad (5.14)$$

证明 取 α 为群 C_n 的生成元,即 $\alpha=(1, 2, \cdots, n)$. 对于任何一个 $\alpha^k(1\leqslant k\leqslant n)$, Ω^D 中关于 α^k 不变的函数 f 必须有周期 k(先将 f 用如下的办法扩展到所有正整数上去,对 $x\equiv m(\mathrm{mod}\ n)$, 令 $f(x)=f(m)$. 然后就可以谈及 f 的周期). 又因它已经有周期 n, 所以它必须有周期 (k, n); 反之,任何有周期 (k, n) 的函数 f, 自然更有周期 k, 从而必然在 α^k 作用下不变. 这表明函数 f 在 α_k 作用下不变的充要条件是它有周期 (k, n). Ω^D 中具有周期 (k, n) 的函数显然共有 $r^{(k,n)}$ 个,由

此得到$|F(\alpha^k)|=r^{(k,n)}$. 又$|C_n|=n$, 以此代入(5.12)式即得

$$N(n,\ r)=N(C_n)=\frac{1}{|C_n|}\sum_{k=1}^{n}|F(\alpha^k)|=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r^{(k,n)}.$$

现在来讨论限制数目的圆排列. 假定$b_1, b_2, \cdots, b_r$是一组给定的正整数. 满足条件$b_1+b_2+\cdots+b_r=n$. 问由b_1个ω_1, b_2个ω_2, $\cdots$, b_r个ω_r所组成的圆排列有多少个? 为此我们需要考虑Ω^D的这样子集E, 对任何$f\in E$, 它恰好在D的某b_i个元上取值为$w_i(i=1, 2, \cdots, r)$. 显然C_n也是作用在E上的群. 我们的问题便等价于去求E在C_n作用下的轨的数目.

对任何$f\in E$, 设它的最小周期为T, 则应有$T|n$. 此时$\{f(1), f(2), \cdots, f(n)\}$恰好包含有$n/T$个完整周期, 在每个周期中都含有同样数目的$\omega_i$, 而$\omega_i$的总数为$b_i$, 故知必有$(n/T)|b_i$, $(i=1, 2, \cdots, r)$, 这又等价于$(n/T)|(b_1, b_2, \cdots, b_r)$. 记$B=(b_1, b_2, \cdots, b_r)$, 则$T$能成为一个最小周期的必要条件是$T$能表成$T=d(n/B)$, 其中$d|B$. 另一方面, 对任何$d|B$, $d(n/B)$确可成为某个$f\in E$的周期, 且容易看出, 以$d(n/B)$为周期(不必是最小周期)的E中f的总数为

$$\frac{\left(d\cdot\frac{n}{B}\right)!}{\left(\frac{db_1}{B}\right)!\left(\frac{db_2}{B}\right)!\cdots\left(\frac{db_r}{B}\right)!}, \qquad (*)$$

对任何一个$1\leqslant k\leqslant n$, 要使它能成为E中f的周期, 则它也必须能被n/B所整除(因为凡最小周期皆必须为n/B的倍数). 因此在应用Burnside引理时, 我们只须考虑这种α^k, 其中$k=x(n/B)$ $(x=1, 2, \cdots, B)$. 如果$(x, B)=d$, 则在此α^k作用下不变的E中f的个数恰就是(*)式所示的以$d(n/B)$为周期的E中的f的个数. 由此应用Burnside引理即得

公式 2 由 b_1 个 ω_1, b_2 个 ω_2, …, b_r 个 ω_r 所组成的圆排列的总数是

$$N(n; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{B}\frac{[(x, B)n/B]!}{\left[\frac{(x, B)b_1}{B}\right]!\left[\frac{(x, B)b_2}{B}\right]!\cdots\left[\frac{(x, B)b_r}{B}\right]!}. \tag{5.15}$$

例 2(项链公式) 以 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ 分别表示 r 种不同颜色的珠子，问由这 r 种珠子串成的长度为 n 的项链有多少种?对于给定的 r 个正整数 $b_1, b_2, \cdots, b_r$, 还可以问由 b_1 个 ω_1, b_2 个 ω_2, …, b_r 个 ω_r 所组成的不同的项链有多少条? 这就是一般的项链问题. Ω^n 中的每一个函数可以代表一条项链. 项链和圆排列的区别仅在于: Ω^n 中的任何函数 f, 不仅经过“推移”得到的函数, 而且经过“翻转”得到的函数也应看成是代表同一条项链. 这表明, 项链的精确的数学定义应该是:

定义 2 集合 Ω^n 在二面体群 D_n 作用下的每一条轨称为是一条项链.

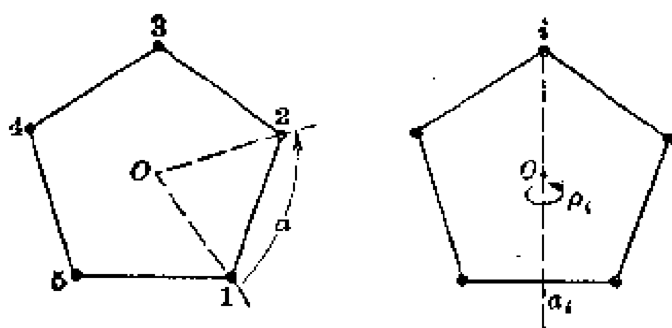
以 $M(n, r)$表示由 r 种不同元素所组成的长度为 n 的项链的个数, 关于项链的计数问题, 有如下的公式.

公式 3

$$M(2n+1, r)=\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n+1}r^{(k, 2n+1)}+\frac{1}{2}r^{n+1}, \tag{5.16}$$

$$M(2n, r)=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}r^{(k, 2n)}+\frac{1}{4}r^{n}(r+1). \tag{5.17}$$

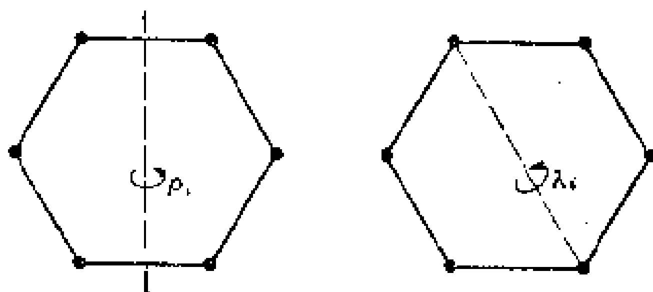
证明 先证明公式(5.16), 二面体群 D_{2n+1} 共有 $2(2n+1)$ 个元素, 可以按旋转和翻转分作两类. 以 α 表绕过正 $2n+1$ 边形中心的垂直轴所作的 $2\pi/(2n+1)$弧度的旋转, 则所有



$2n+1$ 个旋转依次可记为 α, α^2, $\cdots$, α^{2n}, $\alpha^{2n+1}(=e$, 恒等元). 另外的 $2n+1$ 个元便是绕过第 i 个顶点与对边中点 a_i 连线所作的 $180°$ 的翻转 $\rho_i(i=1, 2, \cdots, 2n+1)$. 由前例的讨论知 $|F(\alpha^k)|=r^{(k,n)}$. 而对于任何的 ρ_i, 在它的作用下不变的函数 f 必须是以 ia_i 为轴两边对称的函数. 对于顶点 i, $f(i)$ 有 r 个值可取, 而对 ia_i 右侧的 n 个顶点的任何一个 f 均可独立地选取 Ω 中的任何值, 因此对任何 i 均有 $|F(\rho_i)|=r^{n+1}$. 从而根据 Burnside 引理得

$$M(2n+1, r)=\frac{1}{|D_{2n+1}|}\left(\sum_{k=1}^{2n+1}|F(\alpha^k)|+\sum_{i=1}^{2n+1}|F(\rho_i)|\right)$$
$$=\frac{1}{2(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n+1}r^{(k,n)}+\frac{1}{2}r^{n+1}.$$

对于 D_{2n}, 它的元素除了 $2n$ 个旋转 α^k 之外, 其余 $2n$ 个翻转还可根据是相对于两对边中点连线或相对于一对对顶点连线的翻转而分成两个共轭类, 分别记作 ρ_i 与 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$. 显然有, 对每个 ρ_i, $|F(\rho_i)|=r^n$, 对每个 λ_i, $|F(\lambda_i)|=r^{n+1}$, 从而



$$M(2n, r)=\frac{1}{|D_{2n}|}\Big(\sum_{k=1}^{2n}|F(\alpha^k)|$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|F(\rho_i)|+\sum_{i=1}^{n}|F(\lambda_i)|\Big)$$

$$=\frac{1}{4n}\Big(\sum_{k=1}^{2n}r^{(k,2n)}+nr^n+nr^{n+1}\Big)$$

$$=\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2n}r^{(k,2n)}+\frac{1}{4}r^n(r+1),$$

将公式3与公式1相比较，我们得到项链数目与圆排列数目之间的关系：

公式4

$$M(2n+1, r)=\frac{1}{2}N(2n+1, r)+\frac{1}{2}r^{n+1}, \qquad (5.18)$$

$$M(2n, r)=\frac{1}{2}N(2n, r)+\frac{1}{4}r^n(r+1). \qquad (5.19)$$

现在来讨论限制数目的项链，或称为“**约束项链**”的计数问题．以 $M(\sum_{i=1}^{r}b_i; b_1, b_2, \cdots, b_r)$ 表示由 b_1 个 ω_1, b_2 个 ω_2, $\cdots$, b_r 个 ω_r 所组成的项链的总数，则用与公式2，公式4类似的推导方法容易证得

公式5 I) 如果 $\sum_{i=1}^{r}b_i=2n+1$，则当 b_i 中只有一个奇数，譬如 b_1 是奇数时，那么

$$M(2n+1; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$

$$=\frac{1}{2}N(2n+1; b_1, b_2, \cdots b_r)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)!\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!}; \qquad (5.20)$$

当 b_i 中奇数多于一个时，则

$$M(2n+1; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n+1; b_1, b_2, \cdots, b_r). \tag{5.21}$$

II) 如果 $\sum_{i=1}^{r} b_i = 2n$. 当 b_i 全为偶数时

$$M(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{n!}{\left(\frac{b_1}{2}\right)!\left(\frac{b_2}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!}; \tag{5.22}$$

当 b_i 中只有两个奇数, 譬如 b_1, b_2 为奇数时

$$M(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$=\frac{1}{2}N(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{(n-1)!}{\left(\frac{b_1-1}{2}\right)!\left(\frac{b_2-1}{2}\right)!\left(\frac{b_3}{2}\right)!\cdots\left(\frac{b_r}{2}\right)!}; \tag{5.23}$$

当 b_i 中奇数多于两个时

$$M(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r)=\frac{1}{2}N(2n; b_1, b_2, \cdots, b_r). \tag{5.24}$$

公式中出现的 $N(\sum b_i; b_1, b_2, \cdots, b_r)$ 用公式 2 来计算, 公式 5 本身同时也就指明了约束项链个数同约束圆排列个数之间的关系.

§5 Pólya 计数定理及其应用

首先我们来讲述可以用 Pólya 计数定理来计算的问题的一般形式. 给定一个定义域 D, 一个值域 R, 象通常一样, 将

定义在 D 上取值于 R 中的所有函数的集合记作 R^D. 另外有一个作用在 D 上的群 G(或 D 上的置换群). 两个函数 $f_1, f_2\in R^D$ 称为是等价的, 当且仅当存在一个置换 $\alpha\in G$, 使得对一切 $d\in D$, 有 $f_1(d)=f_2(\alpha(d))$. 容易验证如此定义的等价性满足等价关系的三条件. 在 R 上定义一个权函数 w, 权函数取值为 k 维空间的非负整点, 可以记

$$w(r)=(w_1(r),\ w_2(r),\ \cdots,\ w_k(r)),$$

其中 $w_i(r)$ 是非负整数. 对于每个 $f\in R^D$, 指定一个权 $W(f)$:

$$W(f)=\prod_{d\in D} x_1^{w_1(f(d))}x_2^{w_2(f(d))}\cdots x_k^{w_k(f(d))},$$

此处 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是形式参数. 容易看出, 彼此等价的函数有相同的权.

按照 Pólya 原来的说法, 把定义域 D 中的元素叫"位置", 值域 R 中的元素叫"图形"(figures), R^D 中的函数叫做"构形"(或"选序"), 置换群叫做"构形群".

假定在 R 中权等于 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ 的图形有 $h_{i_1i_2\cdots i_k}$ 个, 令

$$h(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)=\sum h_{i_1i_2\cdots i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}$$

称为"图形计数级数"(或"库藏枚举子"store enumerator). R^D 中权等于 $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}$ 的函数的等价类有 $H_{i_1i_2\cdots i_k}$ 个, 令

$$H(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)=\sum H_{i_1i_2\cdots i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}$$

称为"构形计数级数".

我们的问题就在于寻求构形计数级数, 一旦有了它, 利用其展开式, 便可求得任何的 $H_{i_1i_2\cdots i_k}$, 也就得知具有权 $x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}$ 的构形的等价类的数目有多少个. 从组合数学或图论中提出的许多计数问题正是以这种形式归结为对具有指定权的构形等价类的计算问题的. 很显然, $H(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 要依赖于构形群 G 的循环指标 $C(G)$ 和图形计数级数 $h(x_1, x_2,$

$\cdots, x_k)$. Pólya 找到了这种依赖关系的明显表达式，这是一个有着优美的表现形式和广泛实际应用的计数公式。

对任何一个置换群 G 的循环指标

$$C(G)=C(G;t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

和任意函数 $b(x_1, x_2, \cdots, x_k)$，定义

$$\begin{aligned}&C(G, b(x_1, x_2, \cdots, x_k))\\&\quad=C(G; b(x_1, x_2, \cdots, x_k), b(x_1^2, x_2^2, \cdots, x_k^2), \cdots,\\&\qquad b(x_1^n, x_2^n, \cdots, x_k^n)).\end{aligned}$$

定理 4(Pólya 计数定理) 构形计数级数可以由将图形计数级数以上面的方式代入到构形群的循环指标中去而得到，具体地说，我们有

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_k)=C(G, b(x_1, x_2, \cdots, x_k)).$$

证法 对每一个置换 $\alpha\in G$，用如下的办法对应一个 R^D 上的置换 $\tilde{\alpha}$：对于任何一个 $f\in R^D$，令

$$\tilde{\alpha}f(x)=f(\alpha(x)),$$

当 $|R|>1$ 时，易知所有的 $\tilde{\alpha}$ 构成一个群，记此群为 $\tilde{G}$。于是 R^D 中函数的等价类就相当于在置换群 $\tilde{G}$ 之下的轨。假定 f 是在 $\tilde{\alpha}$ 下不变的一个构形，ζ 是 α 的循环分解中的一个长度为 l 的循环，则对 ζ 的表示式中的每一个元素 b，必须有 $f(b)=f(\zeta(b))$。这表明，f 是这样一个函数，它在参加到循环 ζ 的所有元上取同一的值，反之亦然，即 f 如果确实在 α 的每一个循环的所有元素上都取同一的值，则 f 一定在置换 $\tilde{\alpha}$ 之下不变。现在我们就可以用这样的办法来构造出在置换 $\tilde{\alpha}$ 之下不变的所有构形 f 来：对 α 的每一个循环 ζ，从 R 中独立地选取一个元素 r，然后在参加到循环 ζ 的所有元素 b 上皆令 $f(b)=r$。这样我们当然就很容易根据 $|R|$ 和 α 的型而确

定出在 $\tilde{\alpha}$ 之下不变的构形 f 的数目，但是我们的目的并不止此，还需考虑进一步的问题．若元素 r 的权 $w(r)$ 等于 $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$（即 $w_1(r)=i_1,\ w_2(r)=i_2,\ \cdots,\ w_k(r)=i_k$），而 ζ 的长度等于 l，则循环 ζ 就为和式 $\sum\limits_{f=\tilde{\alpha}f} W(f)$ 贡献了一个因式

$$\sum_{r\in R}(x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k})^l=h(x_1^l,\ x_2^l,\ \cdots,\ x_k^l).$$

对于 G 中的每个 α，就有

$$\sum_{f=\tilde{\alpha}f}W(f)=\prod_{i=1}^{s}[h(x_1^i,\ x_2^i,\ \cdots,x_k^i)]^{k_i(\alpha)}$$

（其中 $s=|D|$）．将此方程左边对 $\widetilde{G}$ 中的所有 $\tilde{\alpha}$ 求和，右边对相应的 α 求和，再分别除以 $|\widetilde{G}|=|G|$ 即得

$$\frac{1}{|\widetilde{G}|}\sum_{\tilde{\alpha}\in\widetilde{G}}\sum_{f=\tilde{\alpha}f}W(f)=\frac{1}{|G|}\sum_{\alpha\in G}\prod_{i=1}^{s}[h(x_1^i,\ x_2^i,\ \cdots,\ x_k^i)]^{k_i(\alpha)}.$$

这个方程的右边是 $C(G,\ h(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k))$．应用定理 3 知道，左边就是 R^D 在置换群 $\widetilde{G}$ 之下的轨的权的和，但是由于

$$\sum_{i=1}^{n}W(\theta_i)=\sum H_{i_1i_2\cdots i_k}x_1^{i_1}x_2^{i_2}\cdots x_k^{i_k}=H(x_1,\ x_2,\ \cdots,x_k),$$

从而定理得证．

下面我们再来给出 Pólya 定理的另外一种证明，它不直接引用 Burnside 引理，而把引理的证明思想纳入其中．两种证明只是叙述方法不同，并无本质的差别，但是通过两相对比和印证，会使我们对这个重要定理理解得更深刻，掌握得更牢固．

证法　设 $|G|=p$．将 G 中的全体置换分别记为 $\alpha_1=e$（单位元），$\alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_p$．对每个 α_i，令

$$E(\alpha_i)\equiv E(\alpha_i;x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)=\sum_{f\in F(\tilde{\alpha}_i)}W(f),$$

这就是在置换 $\tilde{\alpha}_i$ 之下不变的所有构形的权的和，称它为关于 α_i 不变的构形计数级数(或选序枚举子)。

今任取一个固定的构形 f 来考虑. 我们知道使 f 不变的全体置换 α (实应为 $\tilde{\alpha}$) 作成 G 的一个子群 G_f. 将 G 按 G_f 作左陪集分解，设为

$$G = eG_f \cup \beta_1 G_f \cup \cdots \cup \beta_{m-1} G_f,$$

则在 f 所在的等价类(或 f 在群 $\tilde{G}$ 中的轨)中共包含有 m 个不同的构形，它们是 $f, \tilde{\beta}_1 f, \cdots, \tilde{\beta}_{m-1} f$. 此处 m 是左分解中陪集的个数，

$$m|G_f| = |G| = P,$$

我们还知道，对每个 $\tilde{\beta}_i f$ 恰好也有 $|G_f|$ 个置换使其不变(使 $\tilde{\beta}_i f$ 不变的置换群是 G_f 的共轭子群 $\beta_i G_f \beta_i^{-1}$). 因此 f 连同每个 $\tilde{\beta}_i f$ 的权都在下列和式

$$E(\alpha_1) + E(\alpha_2) + \cdots + E(\alpha_p)$$

中的 $|G_f|$ 个项中出现. 故 f 的权，亦即 f 所在的等价类的权 $W(f)$ (注意 $W(\tilde{\beta}_i f) = W(f)$) 一共在和中出现的总次数为 $m|G_f| = |G| = p$ 次. 从而对于算式

$$(E(\alpha_1) + E(\alpha_2) + \cdots + E(\alpha_p))/p$$

来说，就等于对每个构形等价类的权都十分准确地计算了一次，这恰好表明它就是我们开头所定义的构形计数级数 $H(x_1, x_2, \cdots, x_k)$.

最后，令置换 α_i 的循环分解具有一般形式的循环类型 $[k_1, k_2, \cdots, k_s]$. 由于 $f \in F(\tilde{\alpha}_i)$ 当且仅当 f 在 α_i 的每一循环 ζ 上取同一个 r 值，由此结合乘法规则，当令 f 跑过整个 $F(\tilde{\alpha}_i)$ 而对 f 的权 $W(f)$ 求和时，即得

$$E(\alpha_i) = \sum_{f \in F(\tilde{\alpha}_i)} W(f) = h_1^{k_1} h_2^{k_2} \cdots h_s^{k_s},$$

其中 $h_1 \equiv h(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, $h_i \equiv h(x_1^i, x_2^i, \cdots, x_k^i)$. 对所有的 i 求和并根据群 G 的循环指标的定义即得

$$
\begin{aligned}
H(x_1, x_2, \cdots, x_k) &= \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{p} E(\alpha_i) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum h_1^{k_1} h_2^{k_2} \cdots h_s^{k_s} \\
&= C(G; h_1, h_2, \cdots, h_s) \\
&= C(G; h(x_1, x_2, \cdots, x_k)).
\end{aligned}
$$

现在举几个简单的例子来说明计数定理的应用.

例 1 考虑从 m 种相异事物 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中允许重复每次取 n 个的排列问题. 令 $D=\{1, 2, \cdots, n\}$, $R=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 则所说的排列与 R^D 中的构形形成一一对应. 为把不同的排列看成非等价的构形, 所以假定等价概念的置换群只能取作单位元素群 $G\equiv\{e\}$. 于是

$$C(G)=t_1^n.$$

对每个 $a_i\in R$, 如此定义权

$$w(a_i)=(w_1(a_i), w_2(a_i), \cdots, w_m(a_i)),$$

令
$$w_j(a_i)=\begin{cases}1, & 当\ j=i,\\ 0, & 当\ j\neq i,\end{cases}$$

于是图形计数级数为

$$h(x_1, x_2, \cdots, x_m)=x_1+x_2+\cdots+x_m,$$

应用 Pólya 定理即得构形计数级数为

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_m)=(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n.$$

令所有的 x_i 皆等于 1, 即得一切相异的重复排列共有 m^n 个.

例 2 试考虑从 m 种相异事物 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 中容许重复每次取 n 个的组合问题. 所有的定义一如前令, 但此时, 由于对不同的组合须看成是非等价的构形, 因此用来界定等价

关系的置换群必须取作 n 次对称群 S_n. 故由 Pólya 定理可知构形计数级数为

$$H(x_1, x_2, \cdots, x_m)=C(S_n; h_1, h_2, \cdots, h_n)$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{(k)}\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} i^{k_i}k_i!}h_1^{k_1}h_2^{k_2}\cdots h_n^{k_n},$$

其中
$$h_i=x_1^i+x_2^i+\cdots+x_m^i.$$

例 3 令 $D=\{1, 2, \cdots, n\}$. 取 R 为所有非负整数的集合, 即 $R=\{0, 1, 2, \cdots\}$. 取 n 次对称群作为构形群, 用恒等函数 $w(r)=r$ 来定义权, 则图形计数级数为

$$h(x)=1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}=(1-x)^{-1}.$$

于是构形计数级数为

$$H(x)=C(S_n, (1-x)^{-1})$$
$$=C(S_n; (1-x)^{-1}, (1-x^2)^{-1}, \cdots, (1-x^n)^{-1})$$
$$=\frac{1}{n!}\sum_{(k)}\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{n} i^{k_i}k_i!}(1-x)^{-k_1}$$
$$\times(1-x^2)^{-k_2}\cdots(1-x^n)^{-k_n}.$$

级数 $H(x)$ 的组合直观意义将在下节中得到解释.

§6 正整数的分拆

将正整数 n 表作 k 个正整数的和, 譬如

$$n=x_1+x_2+\cdots+x_k, \quad x_i>0, \ i=1, \cdots, k.$$

称为是 n 的一个 k-分拆. 于是 n 的所有 k-分拆的个数也就相当于上述方程的所有正整数解的组数. 而这是极容易求的: 设想在一条直线上点上 n 个点, 那么这 n 个点彼此之间

形成 $n-1$ 个空隙，在这些空隙中任取出 $k-1$ 个空隙各插入一条竖线便将这 n 个点分成了 k 部分，将各部分的点数依次记为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，从而便得到了 n 的一个 k-分拆。这种对应办法显然是一对一的，于是所有 k-分拆的个数便是所有插入竖线的方法数，而这显然就是 $\binom{n-1}{k-1}$.

如上所讨论的是关于 n 的有序分拆，它实在太简单了；我们感兴趣的是关于 n 的无序分拆，这就要复杂得多了。所谓 n 的无序分拆是指对于 n 的任何两个有序分拆，当它们只差一个分拆各加项之间的置换时，便看作是同一个分拆 例如对 7 的两个 4-分拆

$$7=1+1+2+3,\quad 7=1+3+1+2,$$

在作为无序分拆时便是同一个分拆. 因此若干个有序分拆可以对应同一个无序分拆. 显然我们若取各加项从大到小排列的有序分拆去和无序分拆对应，则这种对应便是一对一的了。换言之，方程式

$$n=x_1+x_2+\cdots+x_k$$

的满足条件 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_k \geqslant 1$ 的每一组整数解就代表了 n 的一个无序的 k-分拆，以下我们在提到分拆时，均指无序分拆.

以 $p_k(n)$ 表示 n 的所有 k-分拆的个数. 对固定的 n，令

$$p(n)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots,$$

它实际上是有限项，因为当 $k>n$ 时，$p_k(n)=0$；它表示 n 的所有不同的分拆的总数. 譬如对 $n=5$ 来说，我们有这样一些分拆

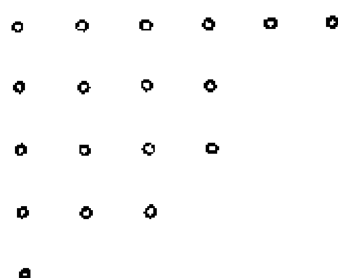
$$5=5,\quad 5=4+1,\quad 5=3+2,\quad 5=3+1+1,$$
$$5=2+2+1,\quad 5=2+1+1+1,\quad 5=1+1+1+1+1.$$

因此 $p_1(5)=1$, $p_2(5)=2$, $p_3(5)=2$, $p_4(5)=1$, $p_5(5)=1$, $p(n)=1+2+2+1+1=7$.

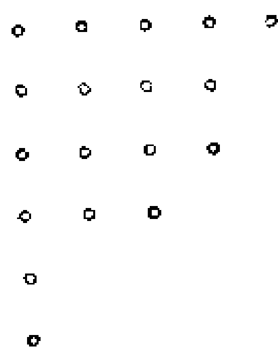
现在对 n 的每个 k-分拆:

$$n=x_1+x_2+\cdots+x_k,\quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_k\geqslant 1,$$

用一些点图来表示这个分拆，在头一行上画上 x_1 个点，第二行上画上 x_2 个点，等等. 各行的起始点画在第一列上，第二点画在第二列上，等等. 例如对 $16=6+4+4+3+1$ 这个分拆画出的点图应该是



这种点图与分拆之间的对应显然是一对一的. 对每个点图当我们把它"转置"一下(即把行列对调)，就又得到一个点图，例如从上一点图得到的转置点图便是



而与这个点图相对应的分拆便是

$$16=5+4+4+3+1+1,$$

与转置点图相对应的分拆称为原分拆的**共轭分拆**. 共轭关系显然是对称的. n 的 k-分拆的共轭分拆显然具有这样的

性质：它的分拆的最大部分的长度等于 k，反之亦然．从这种简单的图示分析就使我们得到如下的重要定理．

定理 5 正整数 n 的所有 k-分拆的个数等于使得分拆的最大部分等于 k 的 n 的所有分拆数．

回头来讨论前面所定义的 $p(n)$，它表示 n 的所有分拆总数，这显然也就是下列方程的所有整数解组数：

$$n=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0,$$

如果我们以 y_i 表示诸 x_j 中等于 i 那些 x_j 的个数，则也可看出 $p(n)$ 就是方程

$$n=1y_1+2y_2+\cdots+ny_n,\quad y_i\geqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

的整数解组数．

定理 6 $p(n)$ 的发生函数

$$f(x)=1+p(1)x+p(2)x^2+\cdots+p(n)x^n+\cdots$$

就是函数

$$P(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}.$$

证明 因为 $(1-x^i)^{-1}=1+x^i+x^{2i}+\cdots+x^{ri}+\cdots$，对方程 $n=1y_1+2y_2+\cdots+ny_n$ 的一组非负整数解 $(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n)$，我们从 $(1-x^i)^{-1}$ 的展式中取项 $x^{y_i i}$ 相乘的结果（当 $i>n$ 时，取 y_i 为 0），便得到一项 x^n，又在 $P(x)$ 的展式中的每一个 x^n 项也只能是通过这种办法得到，因此 x^n 的系数便是方程的解组数也就是 n 的所有分拆数．证毕．

取定一个正整数 n，将任何正整数 m 分作最多不超过 n 部分的分拆数记作 q_m，则 q_m 也就是方程

$$m=x_1+x_2+\cdots+x_n,\quad x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant 0$$

的解组数．这样 q_m 的发生函数恰就是例 3 中所讨论的构形计数级数

$$H(x)=C(S_n,\ (1-x)^{-1}),\tag{5.25}$$

由定理 1 知 q_m 也就是使得分拆的最大部分不超过 n 的 m 的所有分拆总数，这也就是方程

$$m=1y_1+2y_2+\cdots+ny_n, \quad y_i\geqslant 0, \quad i=1, \cdots, n$$

的所有解组数. 用与定理 2 完全类似证明方法易知 q_m 的发生函数又等于(也可作为第二章例 4 的特例得到).

$$\sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)}, \tag{5.26}$$

式(5.25)、(5.26)结合，使我们得到了恒等式

$$C(S_n, (1-x^{-1}))=(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1} \cdots(1-x^n)^{-1},$$

即

$$\frac{1}{n}\sum_{(k)}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} i^{k_i}k_i!}(1-x)^{-k_1}(1-x^2)^{-k_2}\cdots(1-x^n)^{-k_n}$$
$$=(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\cdots(1-x^n)^{-1}, \tag{5.27}$$

当 $n=2$ 时，由此式得到

$$\frac{2}{(1-x)(1-x^2)}=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-x^2},$$

取 $n=3$, 又得

$$\frac{6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$
$$=\frac{1}{(1-x)^3}+\frac{3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{2}{1-x^3},$$

当然这些等式也容易直接验证.

恒等式(5.27)早年曾由 MacMahon 最先注意和系统研究.

由以上的介绍可知，整数的分拆问题也涉及到计数问题，因此它属于组合数学和数论的交叉部分. 当 n 很大时，要计算 $p(n)$ 常常是非常复杂的. 例如，MacMahon 曾反复应用递推关系，经过一系列麻烦的计算之后才找出

$$p(200)=3,972,999,029,388,$$

可以想见，即使借助于现代的计算器去计算 $p(10000)$，恐怕也不是轻而易举的事．对于这样一类计数问题，人们的兴趣转而寻求当 n 无限增大时 $p(n)$ 的渐近公式．如所知，Hardy 与 Ramanujan 曾证得下述结果

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{A\sqrt{n}} \quad (n \to \infty),$$

其中 $A=\pi\sqrt{2/3}$．后来于 1937 年 Rademacher 又在上述工作的基础上把 $p(n)$ 表示成一个收敛的级数．这是理论上的一个重要成果．（参阅 M. Hall «组合论»第 4 章.）

在这里我们只是结合 Pólya 计数定理的应用，对整数分拆问题作一点简单介绍，而不专门去讲述．因为它也是组合分析的重要组成部分之一，建议有兴趣的读者可去查阅有关的专著．

§7 对群的循环指标和 p 点图的计数多项式

图的计数理论是图论的重要组成部分之一．在导出关于树和其它各种类型的图的计数级数时，一般都要用到 Pólya 的计数定理．这里我们只以讨论 p 点图的计数多项式为例以示 Pólya 定理在图论中应用的一斑．

直观地看，平面上有 p 个点，在某些点对之间具有固定的连线，这便是一个"图"．一般地说，一个图 G 是由 p 个点的非空有限集 $V=V(G)$ 和预先给定由 V 中不同的点的 q 个无序对构成的一个集 X 组成．X 中的每个点对 $x=\{u, v\}$ 称为是(联结点 u 和 v 的)一条线(或边)．一个有 p 个点与 q 条线的图称为一个 (p, q) 图．

两个图 G 和 H，若在它们的点之间存在着一个一一映

射σ: $V(G)\to V(H)$，使得(u, v)是G的一条线当且仅当$(\sigma(u), \sigma(v))$是H的一条线,则称G和H是同构的. 显然，同构关系是一种等价关系. 一般情况下把彼此同构的图看成是同一个图.

以g_{pq}表示所有(非等价的)(p, q)图的数目,又令

$$g_p(x)=\sum_q g_{pq}x^q$$

称$g_p(x)$为p点图的计数多项式.

令$V=\{1, 2, \cdots, p\}$,又令$R=\{0, 1\}$. 以$D=V^{(2)}$来记V中所有二元子集$\{u, v\}$的集. 则由D到R中每一个函数即D^R中的每个构形f代表一个图，这个图以V中的p个元素为点,且视$f\{u, v\}$等于1或0而决定u, v之间有无线连. R上的权函数w取作恒等函数，即$w(0)=0$和$w(1)=1$. 为了能够应用Pólya定理来计算$g_p(x)$，我们还需讨论为使非等价的构形所对应的是不同构的图，所需要的是怎样的构形群,以及该群的循环指标如何.

取S_p为作用在V上的对称群. 由S_p可以导出一个作用在$V^{(2)}$上的群$S_p^{(2)}$,它的置换是这样定义的:对每个$\alpha\in S_p$,对应一个$\alpha'\in S_p^{(2)}$，α'对每一对$\{i, j\}$的作用定义为

$$\alpha'\{i, j\}=\{\alpha i, \alpha j\},$$

称$S_p^{(2)}$为**对群**. 很显然,对群$S_p^{(2)}$就能够满足我们上述要求，即当且仅当在对群作用下等价的两个构形所对应的图才是同构的. 因此我们就将对群$S_p^{(2)}$取作构形群. 在此场合，图形计数级数为$h(x)=1+x$. 又具有权为x^q的构形f所对应的恰就是一个(p, q)图. 于是若以

$$C(S_p^{(2)})=C(S_p^{(2)}; t_1, t_2, \cdots, t_{\binom{p}{2}})$$

来表示对群的循环指标,则由Pólya定理即有

定理7 p 点图的计数多项式为

$$g_p(x)=C(S_p^{(2)},\ 1+x).$$

剩下的问题就是要来推导对群的循环指标——$C(S_p^{(2)})$ 的具体表达式了.

任取一个 $\alpha'\in S_p^{(2)}$, 假定 α' 有一个 s-循环:

$$(\{i,\ j\},\ \alpha'\{i,\ j\},\ \cdots,\ \alpha'^{s-1}\{i,\ j\}),$$

由于 $\alpha'^s\{i,\ j\}=\{i,\ j\}$, 于是有两种可能:

1) $\alpha^s i=i,\ \alpha^s j=j.$

2) $\alpha^s i=j,\ \alpha^s j=i.$

下面就针对这两种情形进行仔细的分析.

对于第一种情形, 我们写下两个数列

$$(i,\ \alpha i,\ \alpha^2 i,\ \cdots,\ \alpha^{s-1}i),$$
$$(j,\ \alpha j,\ \alpha^2 j,\ \cdots,\ \alpha^{s-1}j).$$

当把这每个数列写在圆环上时都是这样的圆排列——用置换 α 作用在其中任何一数上皆得下一个数. 再分三种情形来讨论:

a) 第一列中任何一数, 跟第二列中任何一数皆不重合, 同时两列自身也均无相重的数, 那么此两列分别是 α 的两个不同的 s-循环. 而对 α 的两个固定的 s-循环, 当把第一个循环以某种方式写成直线排列之后, 第二个循环写在第二列仍有 s 种配置方法. 所以 α 的任何两个不同的 s-循环, 均可演化出 s 组满足要求的数列对, 因此这种数列对共有 $s\binom{k_s}{2}$个 (其中 $k_s=k_s(\alpha)$是 α 的 s-循环的个数).

b) 第一列与第二列无重数, 但某一列本身有重数. 此时设第一列的最小周期为 l, 第二列的最小周期为 r, 必须有 $l\neq r$. 又为使对任何 $1<k<s$ 皆有 $(\alpha^k i,\ \alpha^k j)\neq(i,\ j)$, 必须而

且只须 $m(r, l)=s$.

注意对每一对满足条件 $m(r, l)=s$ 的 $r<l$ 及 α 的一对取定的 r-循环和 l-循环，实际上可以从它们得到 $d(r, l)$ 个上述的数列对.（注：为证此事，实际只需证

$$\begin{array}{llll} r, & 2r, & \cdots, & \frac{s}{r}r; \\ r+1, & 2r+1, & \cdots, & \frac{s}{r}r+1; \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r+d-1, & 2r+d-1, & \cdots, & \frac{s}{r}r+d-1, \end{array}$$

组成模 l 的完全剩余系即可. 而由于 $\left(r, \frac{s}{r}\right)=\left(r, \frac{l}{d}\right)=1$，所以 $r, 2r, \cdots, \frac{s}{r}r$ 组成模 $\frac{l}{d}$ 的完全剩余系. 从而 $r, 2r, \cdots, \frac{s}{r}r$ 的模 l 的剩余集合是 $(0, d, 2d, \cdots, l-d)$. 由此可知所说的数组确实组成模 l 的完全剩余系.）

c）第一列与第二列有重数. 此时第二列不过是第一列的某个推移而已（它们所对应的圆排列相同）. 又当这种情形发生时，必定没有小于 s 的周期（否则数对 $(\alpha^k i, \alpha^k j)$ 间将有重复者）. 所以情形 C 发生当且仅当两数列均对应 α 的同一个 s-循环，只是位置错开而已. 这就告诉我们这种数列对当 s 是奇数时有 $\frac{s-1}{2}k_s$ 个，而当 s 是偶数时有 $\left(\frac{s}{2}-1\right)k_s$ 个.

对于第二种情形，写出的两个数列实际上是

$$(i, \alpha i, \cdots, \alpha^{s-1}i),$$
$$(\alpha^s i, \alpha^{s+1}i, \cdots, \alpha^{2s-1}i),$$

并且 $\alpha^{2s}i=i$. 把这两个数列连接起来写成一个数列

$$(i, \alpha i, \cdots, \alpha^{s-1}i, \alpha^s i, \cdots, \alpha^{2s-1}i),$$

如果这两个数列有小于 $2s$ 的周期 k，则必有 $k|2s$，又 k 必不等于 s（由于 $\alpha^s i=j\neq i$），从而 $k<s$。这样我们得到 $(i,\ \alpha^s i)$ 与 $(\alpha^k i,\ \alpha^{s+k} i)$ 是重复数对，而这不可能。这就表明上面的数列实必为 α 的一个 $2s$-循环。由于从 α 的任何一个 $2s$-循环，均可导出若干个上述的数列对，但这些数列对（彼此相差一个循环，或推移）所对应的 α' 的 s-循环却都是同一个（因为在循环中出现的元素的一般形式总是 $(\alpha^k i,\ \alpha^{k+s} i)$）。这样我们就结论出，与第二种情形相应的 α' 的 s-循环的个数就是 k_{2s} 个。

综合上述各结果，最终使我们得到了对群 $S_p^{(2)}$ 的循环指标就是

$$C(S_p^{(2)})=\frac{1}{p!}\sum_{(k)}\frac{p!}{\prod_{i=1}^{p} i^{k_i}k_i!}\prod_{i=1}^{[p/2]}(t_i t_{2i}^{i-1})^{k_{2i}}\cdot$$

$$\prod_{i=0}^{[(p-1)/2]} t_{2i+1}^{ik_{2i+1}}\prod_{i=1}^{[p/2]} t_i^{i\binom{k_i}{2}}\prod_{0<r<l<p-1} t_{m(r,l)}^{d(r,l)k_r k_l}.$$

例 试求 5 点图的计数多项式。

按照上面的公式，当 $p=5$ 时，可以求得

$$C(S_5^{(2)})=\frac{1}{120}t_1^{10}+\frac{1}{12}t_1^4t_2^3+\frac{1}{8}t_1^2t_2^4+\frac{1}{6}t_1t_3^3$$

$$+\frac{1}{6}t_1t_3t_6+\frac{1}{4}t_2t_4^2+\frac{1}{5}t_5^2.$$

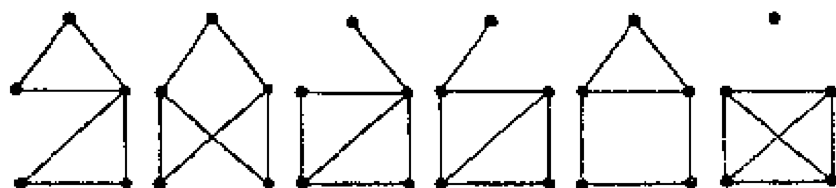
由此可得 5 点图的计数多项式为

$$\begin{aligned}g_5(x)&=C(S_5^{(2)},\ 1+x)\\&=1+x+2x^2+4x^3+6x^4+6x^5\\&\quad+6x^6+4x^7+2x^8+x^9+x^{10}.\end{aligned}$$

从这里我们一眼可见具有任何边数的 5 点图的个数。譬如，由于在 $g_5(x)$ 中 x^6 的系数是 6，这就告诉我们所有的非同构的 (5, 6) 图一共有 6 个，而实际上对此 6 个图我们可以具体

画出如下：

$p=5$, $q=6$, 具有 5 个顶点 6 条线的 6 个图是：



第6章

Hall定理及其应用

§1 相异代表组(SDR)的概念

让我们先从下面的故事谈起.

某科技局贴出招贤榜要招聘外语科技人材，第二天便有甲、乙、丙、丁、戊、己6个"毛遂"登门自荐，他们各自擅长的外语语种有如下表、

甲：{英、日}，

乙：{英、法、德、西}，

丙：{日、俄}，

丁：{英、日、俄}，

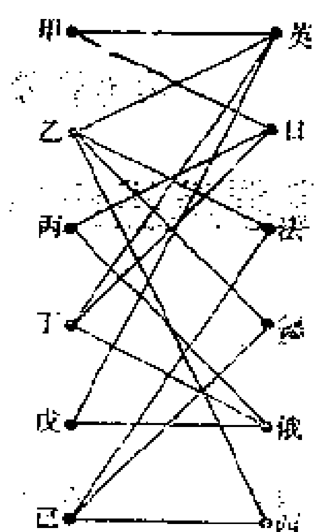
戊：{英、俄}，

己：{法、德、西}.

求贤若渴的赵局长喜出望外，急令李秘书马上安排：6个人全都录用．分配作6个语种的科技情报翻译，每人担任一种.

李秘书几经筹画，终不得法．他还作了如下的一张图，将6个人用左边6个点来代表，将6个语种用右边6个点来代表，每个人同他所擅长的语种用一条线连接起来，在这个图上他希望找到从左边6点发出的6条线而在右方不相交，但也无法找到．最后他终于想到：虽然有6个人，6个语种，会每种语言的都有人在，但要使每人分配一个不同语种的方案客观上却是不存在的．并且找到了两点令人信服的根据向领导作

了汇报：第一，会法、德、西三种外语的只有乙、己两个人，每个语种需要一人，三个语种只有两人显然不够；第二，甲、丙、丁、戊四个人总共只会英、日、俄三种外语．若每人分配一种，必有一人闲置．

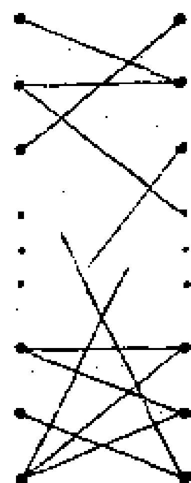


李秘书虽然没有专门学过数学，但他所用推理方法却完全符合数学逻辑，那就是通常所说的“抽屉原理”（见下章）；而他所碰到的这个问题恰正是组合数学中 Hall 定理所要解决的问题的特例．

一般地，如果给定了 n 个非空集合 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，如果存在 n 个相异元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，且

$$x_1\in S_1,\ x_2\in S_2,\ \cdots,\ x_n\in S_n,$$

则 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 就叫作集合系 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 的“相异代表组”．满足什么条件的集合系才存在相异代表组以及有相异代表组的集合系必须满足什么要求，便是 Hall 定理所要讨论的主题．



还有一个有趣的巧合是李秘书所作的图便是“图论”中要专门研究的所谓“偶图”．一般地，假定 X、Y 是两个不同的有限集，集合中的元素个数分别记作 $|X|$，$|Y|$．今将 X 中元、Y 中元分别画在左、右两侧，某些 X、Y 之间有些固定的线，这样便组成一个偶图．偶图可以记作 $G=(X, Y, \Gamma)$，其中 Γ 可以看作是从 X 到 Y 的多值映象．对每个 $x\in X$，Γx 定义为 Y 中使得与 x 有连线的那些 y 所组成的集合．X、Y 中的点均

称为顶点，而图中的每条线都叫作边，有一个公共顶点的两个边称为是相邻的．由两两不相邻的边所组成的边的集合称为是"对集"．于是李秘书的问题也就等价于在相应的图中寻找使用了 X 和 Y 中所有顶点的对集的问题（注意在此例中恰有 X 和 Y 的元素个数相同，即 $|X|=|Y|$，对一般情形，则不作这种要求）．

对于一个给定的偶图 $G=(X,Y,\Gamma)$，令 $u_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$，则 u_X 便是一个集合系；反之从一个集合系出发也可以唯一地确定一个偶图．所以偶图和集合系之间的这种对应关系是一对一的．偶图 G 的使用了 X 中全部顶点的对集，也就相当于集合系 u_X 的一个相异代表组．

本章中将把集合系与偶图结合起来研究．将讲述关于集合系有相异代表组的充要条件的 Hall 定理及其某些应用．

§2 活系和紧活系

假定 $u_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$ 是给定的集合系，对于任何 $A\subset X$，记 $u_A=\{\Gamma x\}_{x\in A}$ 并称为是 u_X 的子系．令 $\Gamma A=\bigcup\limits_{x\in A}\Gamma x$，$\Gamma A$ 也叫系 u_A 的包．特别，ΓX 便是 u_X 的包．

如果对任何有限子集 $A\subset X$，皆有 $|\Gamma A|\geqslant|A|$，则称 u_X 为"活系"，否则称为"死系"．对于 $|\Gamma X|=|X|$ 的活系 u_X 则称为"紧活系"，简称为"紧系"．显然，活系的任何子集均为活系．活系的子系若为紧活系，则称之为"紧子系"．

命题 1　假定 u_X 是活系，u_A 是其任意的紧子系（A 为 X 的真子集），令

$$\Gamma' x=\begin{cases}\Gamma x, & \text{当 } x\in A,\\ \Gamma x-\Gamma A, & \text{当 } x\notin A,\end{cases}$$

则集系 $\mathscr{U}'_X=\{\Gamma'x\}_{x\in X}$ 仍为活系.

证明 对任何有限的 $X_0\subset X$,记

$$X_1=X_0\cap A,\quad X_2=X_0-A,$$

则 $$X_1\cap X_2=\phi,\quad X_1\cup X_2=A.$$

由于 $$|X_2|+|A|=|X_2\cup A|\leqslant|\Gamma(X_2\cup A)|$$
$$=|\Gamma'X_2\cup\Gamma A|=|\Gamma'X_2|+|\Gamma A|$$
$$=|\Gamma'X_2|+|A|.$$

故得 $$|X_2|\leqslant|\Gamma'X_2|,$$

而对于 X_1,由于 $X_1\subset A$,按定义知 $\Gamma'X_1=\Gamma X_1$,故有

$$|\Gamma'X_1|=|\Gamma X_1|\geqslant|X_1|,$$

由此即得 $$|X_0|=|X_1|+|X_2|\leqslant|\Gamma'X_1|+|\Gamma'X_2|$$
$$=|\Gamma'X_1\cup\Gamma'X_2|=|\Gamma'(X_1\cup X_2)|$$
$$=|\Gamma'X_0|.$$

命题2 活系中任二紧子系 $\mathscr{U}_A,\mathscr{U}_B$ 的并 $\mathscr{U}_A\cup\mathscr{U}_B=\mathscr{U}_{A\cup B}$ 与交 $\mathscr{U}_A\cap\mathscr{U}_B=\mathscr{U}_{A\cap B}$ 仍为紧子系,且

$$\Gamma A\cup\Gamma B=\Gamma(A\cup B),\tag{6.1}$$
$$\Gamma A\cap\Gamma B=\Gamma(A\cap B)\tag{6.2}$$

(紧子系的并的包等于包的并,交的包等于包的交).

证明 等式(6.2)不证自明,只须证其余各事. 沿用命题1证明中关于 $\mathscr{U}'_X$ 的假设,并令 $X_1=B\cap A,\ X_2=B-A$,由于 $\mathscr{U}'_X$ 为活系及 $\Gamma'B\subset\Gamma B$,故 $|B|\leqslant|\Gamma'B|\leqslant|\Gamma B|=|B|$,由此得 $|\Gamma'B|=|\Gamma B|,\ \Gamma'B=\Gamma B$,此即

$$(\Gamma X_2-\Gamma A)\cup\Gamma X_1=\Gamma B,$$

两端用 ΓA 作交,即得

$$\Gamma X_1=\Gamma B\cap\Gamma A,$$

这就是等式(6.2).

又从上式得 $|\Gamma X_2-\Gamma A|+|\Gamma X_1|=|\Gamma B|=|B|$. 由于

$$|\Gamma X_2-\Gamma A|=|\Gamma' X_2|\geqslant|X_2|,$$
$$|\Gamma X_1|\geqslant|X_1|,$$

与上式相结合，即知 $|\Gamma X_2-\Gamma A|=|X_2|$，$|\Gamma X_1|=|X_1|$. 后一等式表明 $u_{A\cap B}=u_{X_1}$ 是紧子系，由前一等式得

$$|\Gamma(A\cup B)|=|\Gamma A\cup\Gamma B|=|\Gamma X_2-\Gamma A|+|\Gamma A|$$
$$=|X_2|+|A|=|A\cup B|.$$

所以 $u_{A\cup B}$ 也是紧子系.

系 活系中任意有限个紧子系的并仍为紧子系，并的包等于包的并；任意有限个紧子系的交仍为紧子系，交的包等于包的交.

定义 1 假定 $u_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$ 为活系，对某个 $y\in Y$，若 $u'_X=\{\Gamma x-(y)\}_{x\in X}$ 仍为活系，则称 y 为系 u_X 的"逍遥元". 对某个 $x_1\in X$ 及 $y_1\in\Gamma x_1$，若 $u'_X=\{\Gamma' x\}_{x\in X}$ 仍为活系，其中 Γ' 的定义为

$$\Gamma' x=\begin{cases}\Gamma x_1-y_1, & 当\ x=x_1,\\ \Gamma x, & 当\ x\neq x_1,\end{cases}$$

则称 y_1 为 u_X 的"可删元".

命题 3 假定 u_X 为活系，则对任何 $x_1\in X$，Γx_1 中必存在有活系 u_{X-x_1} 的逍遥元；若 $|\Gamma x_1|>1$，则 Γx_1 中必定存在有 u_X 的可删元.

证明 设 $\Gamma x_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$. 若 $y_k\ (1\leqslant k\leqslant n)$ 不是 u_{X-x_1} 的逍遥元，则必定存在紧子系 $u_{X_k}(x_1\notin X_k)$ 使 $y_k\in\Gamma X_k$. 于是

$$\Gamma x_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_k\}\subset\bigcup_{k=1}^{n}\Gamma X_k=\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{n}X_k\right).$$

由命题 2 知 $u_{\bigcup_{k=1}^{n}X_k}$ 仍为紧系，从而

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} X_k \cup \{x_1\}\right| = \left|\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right| + 1 = \left|\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k\right)\right| + 1$$

$$= \left|\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k \cup \{x_1\}\right)\right|$$

$$+1 > \left|\Gamma\left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k \cup \{x_1\}\right)\right|$$

矛盾.

现设 $y_1, y_2 \in \Gamma x_1$, 若 y_1, y_2 均非可删元, 则必有

$$X_1 \subset X - \{x_1\}, \quad X_2 \subset X - \{x_1\}$$

使得 $\{\Gamma x\}_{x\in X_1}$, $\{\Gamma x\}_{x\in X_2}$ 均为紧系, 且分别有

$$\Gamma x_1 - \{y_1\} \subset \Gamma X_1, \quad \Gamma x_1 - \{y_2\} \subset \Gamma X_2,$$

于是 $\Gamma x_1 \subset \Gamma(X_1 \cup X_2)$, 由于 $u_{X_1\cup X_2}$ 为紧系, 这就导致了 $u_{X_1\cup X_2\cup\{x_1\}}$ 为死系, 矛盾. (关于 y_1 不是可删元时, 所说的 X_1 的存在性的补证: 若 y_1 不是可删元, 则如定义 1 中所令的 u'_X 必为死系, 于是有 $X_1 \subset X$, 使 $|X_1| > |\Gamma' X_1|$. 但若 $x_1 \notin X_1$, 总有 $\Gamma' X_1 = \Gamma X_1$, $|\Gamma' X_1| = |\Gamma X_1| \geqslant |X_1|$, 这就表明必须有 $x_1 \in X_1$. 由 $\Gamma' X_1 = (\Gamma x_1 - y_1) \cup \Gamma(X_1 - x_1)$ 而

$$|\Gamma(X_1 - x_1)| \geqslant |X_1 - x_1| = |X_1| - 1,$$

因此要想不等式 $|X_1| > |\Gamma' X_1|$ 能成立, 必须有

$$|\Gamma(X_1 - x_1)| = |X_1 - x_1|$$

且同时有 $\Gamma x_1 - y_1 \subset \Gamma(X_1 - x_1)$.)

§3 Hall 定理的证明和推广

对于集合系 $u_X = \{\Gamma x\}_{x\in X}$, 假定 $y_x = f(x)$ 是定义于 X 上而在 Y 中取值的函数, 满足两个条件: 1) 对任何 $x \in X$, $f(x) \in \Gamma x$; 2) 对任何 $x_1 \neq x_2$, 恒有 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 则称 f 为集合系 u_X 的"眼". 对每个 x, y_x 称为 x 在眼中的代表. 显而易见,

"眼"就是本章引言中所提过的相异代表组(在文献中常记作 SDR，它乃是 System of Distinct Representatives 的缩写)，所以引进新的名字完全是为了书写的简化和叙述的方便. 在某些场合我们也将眼 f 记作 $\{f(x)\}_{x\in X}$ 或 $\{y_x\}_{x\in X}$.

子系 $\mathfrak{u}_{X_1}$ 的眼也称为是系 $\mathfrak{u}_X$ 的**假眼**. 眼中元素的个数称为眼的**长度**. $\mathfrak{u}_X$ 可以存在也可以不存在真眼，但总有若干假眼，对于它的最长的假眼称之为"大眼". 对任何一个假眼 $\{y_x\}_{x\in X_1}$，二元元素集 $\{xy_x\}_{x\in X_1}$ 称为集合系 $\mathfrak{u}_X$ 的对集，与大眼相应的对集称为**极大对集**，一眼可见，对于集合系 $\mathfrak{u}_X$ 如此定义的对集，极大对集搬到与它对应的偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$ 中来，则恰就是偶图中原有的定义.

现在让我们先以集合系的形式来给出 Hall 定理的叙述并给出它的三种不同的证明，其中第一种基本上同于 Hall 的原证，而第二、三两种则摘自作者之一的文章[*].

定理 1(Hall)　集合系 $\mathfrak{u}_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$ 有眼的充分必要条件是 $\mathfrak{u}_X$ 为活系.

条件的必要性是显然的，因若 $\mathfrak{u}_X$ 有眼 $\{y_x\}_{x\in X}$，则对任何 $X_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}\subset X$,

$$|\Gamma X_1|\geqslant\left|\bigcup_{k=1}^{n}\{y_{x_k}\}\right|=n=|X_1|,$$

故 $\mathfrak{u}_X$ 为活系.

下面对条件的充分性给出三种证明.

证法 1　假定 X 为有限集，我们对 $|X|=n$ 用归纳法证明. 当 $n=1$ 时定理显然成立. 现假定对任何 $k<n$ 的正整数 k，定理均成立. 设

[*] 蒋茂森："关于 Hall 定理的几种新证明"，吉林大学自然科学学报第一期，1978.

$$u_X=\{\Gamma x\}_{x\subset X} \text{ 为 } |X|=n,\ X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$$

的任一活系。若在 u_X 中除它本身之外不存在任何紧子系，则从 Γx_1 中任取一元 y_1 作为 x_1 的代表，去掉 Γx_1 并从所有其余的 Γx_i 中删掉 y_1 所得到的系即 $u'_{X-x_1}=\{\Gamma x_i-y_1\}_{x_i\in X-x_1}$ 仍为活系，按归纳假设它有眼，设为 $\{y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n\}$，则$\{y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n\}$便是系 u_X 的眼。

若在 u_X 中存在一个不等于全系的紧子系 u_A(即 $A\subset X$, $A\neq X$)。对每个 $x\in X-A$，令 $\Gamma'x=\Gamma x-A$。由命题1知 $\{\Gamma'x\}_{x\in X-A}$ 为活系，由 $|X-A|<n$ 及 $|A|<n$，用归纳假设知二者(系$\{\Gamma x\}_{x\in A}$ 及系$\{\Gamma'x\}_{x\in X-A}$)均有眼，二眼合并便构成了系 u_X 的眼。

证法2 由于 u_X 是活系，由命题3知 Γx_1 中必存在 u_{X-x_1} 的逍遥元，任取一个这种逍遥元并记作 y_{x_1}，于是$\{\Gamma x-y_{x_1}\}_{x\in X-x_1}$ 仍为活系，任取 $\Gamma x_2-y_{x_1}$ 中的系$\{\Gamma x-y_{x_1}\}_{x\in X-x_1-x_2}$ 的一个逍遥元记作 y_{x_2}，如此等等，依次取得的这些逍遥元 $\{y_{x_1},\ y_{x_2},\ \cdots,\ y_{x_n}\}$便构成了集系 u_X 的一个眼。

证法3 从集系 u_X 的每个多于一个元素的集合中依次删去可删元，则最后得到的全是单元集的活系本身就是原系的一个眼。

Hall 定理在图论中常被叙述成下面的形式，并通常称为 König-Hall 定理。

定理1′ 在偶图 $G=(X,\ Y,\ \Gamma)$中存在着一个使用了 X 中全部顶点的对集的充分必要条件是：对任何 $A\subset X$，总有$|\Gamma A|\geqslant|A|$。

为了考虑 Hall 定理的推广，让我们将集合系 u_X 的大眼的长度记作 β，并引进欠数的概念。令

$$\delta_X=\max_{A\subset X}(|A|-|\Gamma A|)$$

称为集系 u_X 的欠数或偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$ 的 X-欠数. 于是有

定理 2(König-Ore) $\beta=|X|-\delta_X$.

证明 根据 β 的定义, 必有 X 的一个基数为 β 的子集 B 使得子系 $u_B=\{\Gamma x\}_{x\in B}$ 为活系, 从而按 Hall 知对 B 的任何子集 E, 总有 $|E|-|\Gamma E|\leqslant 0$. 从而对任何 $A\subset X$,

$$\begin{aligned}|A|-|\Gamma A| &= |(X-B)\cap A|+|B\cap A|-|\Gamma A|\\ &\leqslant |X-B|+|B\cap A|-|\Gamma(B\cap A)|\\ &\leqslant |X-B|=|X|-|B|=|X|-\beta,\end{aligned}$$

由 A 的任意性, 知

$$\delta_X\leqslant|X|-\beta. \tag{6.3}$$

任取一个基数为 δ_X, 而与 X、Y 均无公共元素的集合 Z, 对每个 $x\in X$, 令 $\Gamma'x=\Gamma x\cup Z$, 集合系 $u'_X=\{\Gamma'x\}_{x\in X}$. 则对任何 $A\subset X$, 有

$$|A|\leqslant\delta_X+|\Gamma A|=|Z|+|\Gamma A|=|\Gamma'A|.$$

所以 u'_X 是活系, 根据 Hall 定理知其有眼, 在此眼中充其量有 X 中的 δ_X 个 x 以 Z 中元为代表, 去掉这些代表之后, 我们得到的便是 u_X 的不少于 $|X|-\delta_X$ 个元素的眼, 从而得知必有

$$\beta\geqslant|X|-\delta_X, \tag{6.4}$$

结合不等式(6.3)、(6.4)即得 $\beta=|X|-\delta_X$.

当 $\delta_X=0$ 时, 定理 2 即归结为 Hall 定理, 从这个意义上讲, 它可视为 Hall 定理的推广.

§4 极大对集数和极小覆盖数

对任何集系 $u_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$, 如前所定义的大眼的长度 β 就是 u_X 的极大对集中所包含的对集的个数; 因此 β 也叫作集

合系 u_X(或偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$)的“极大对集数”.

现在假定集合 $C=X_1\cup Y_1$, 其中 $X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$ 满足如下的条件：对任何 $x\in X$ 及 $y\in\Gamma x$, 若 $x\notin X_1$ 则必有 $y\in Y_1$, 则称 C 为集系 u_X(或偶图 G)的“负荷集”. 换言之，负荷集就是那种顶点集，使对偶图的任何一边的两顶点中至少必有一个属于该集. 包含元素个数最少的负荷集称为“极小负荷集”. 极小负荷集的元素个数记作 α, 由于对于负荷集也称为是覆盖，故今后径将 α 称为“极小覆盖数”.

命题 4 $\alpha=|X|-\delta_X$.

证明 令 $B=X-A$, 则

$$\begin{aligned}|X|-\delta_X&=|X|-\max_{A\subset X}(|A|-|\Gamma A|)\\&=\min_{A\subset X}(|X|-|A|+|\Gamma A|)\\&=\min_{B\subset X}(|B|+|\Gamma(X-B)|).\end{aligned}$$

集合 $B\cup\Gamma(X-B)$ 显然是负荷集，又每一极小负荷集皆能表成此种形式，因而结论成立.

联合命题 4 与前节定理 2, 立得

定理 3(König) $\beta=\alpha$.

这是由 König 首先发现的一条定理，它揭示了偶图(或集合系)的如下的重要性质：在任何偶图中，不相邻边的最大数就等于能“覆盖”所有边的顶点的最小数.

形式的推导往往容易掩盖问题的实质，让我们再作如下的分析. 任取一个固定的极大对集 B, 则对于任何一个负荷集 C 说来，B 中的每个对集(或边) xy_x 的两顶点 x, y_x 中至少必有一个属于 C, 这就表明 $|C|\geqslant\beta$. 当将 C 取作极小负荷集时，立得 $\alpha\geqslant\beta$. 为什么反向的不等式“$\beta\geqslant\alpha$”也正确呢？下面的两个命题便可视为对此问题作的两条注脚.

命题 5 对任何一个极大对集 B，一定存在一个由 B 中边的某 β 个顶点作成的负荷集.

证明 假设 $B=\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_\beta y_\beta\}$. 令 $X_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_\beta\}$, $Y_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_\beta\}$. 对任何 $x_0\in X-X_1$, 由于系 $u_{X_1\cup\{x_0\}}=\{\Gamma x\}_{x\in X_1\cup\{x_0\}}$ 不是活系(否则将有更大的对集), 就必须有 u_{X_1} 的一个紧子系 $u_{X_{x_0}}$ 使 $\Gamma_{x_0}\subset\Gamma_{X_{x_0}}$. 令

$$X^*=\bigcup_{x_0\in X-X_1}X_{x_0},$$

则 u_{X^*} 仍为紧子系且 $\Gamma(X-X_1)\subset\Gamma X^*$. 无妨设

$X^*=\{x_1, x_2, \cdots, x_\gamma\}$, 于是由系 u_{X^*} 的紧性知

$$\Gamma[(X-X_1)\cup X^*]=\Gamma X^*=\{y_1, y_2, \cdots, y_\gamma\}.$$

于是令
$$X'=\{x_{\gamma+1}, x_{\gamma+2}, \cdots, x_\beta\},$$
$$Y'=\Gamma(X-X')=\{y_1, y_2, \cdots, y_\gamma\},$$

则 $C=X'\cup Y'$ 便是一个满足要求的负荷集.

命题 6 对任何一个极小负荷集 $C=X_1\cup Y_1$, 必定存在一个使用 C 中所有 α 个点为顶点的包含了 α 个边的对集.

证明 对每个 $x\in X_1$, 令

$$\Delta x=\Gamma x-Y_1,$$

我们断言, $u_{X_1}=\{\Delta x\}_{x\in X_1}$ 是活系. 若不然, 则存在 $X'\subset X_1$, 使 $|\Delta X'|<|X'|$, 于是在 C 中以 $\Delta X'$ 取代 X', 即令

$$C'=(X_1-X')\cup\Delta X'\cup Y_1,$$

则
$$|C'|=|X_1|-|X'|+|\Delta X'|+|Y_1|<|X_1|+|Y_1|=|C|=\alpha,$$

只要我们能证明 C' 也是负荷集, 这便矛盾. 而为此只须考虑这种边 x_0y_0, 其中 $x_0\in X'$ 而 $y_0\notin Y_1$, 而对这种边自然有

$$y_0\in\Gamma x_0-Y_1=\Delta x_0,$$

从而 $y_0\in\Delta X'$. 既然 u_{X_1} 是活系, 根据 Hall 定理知其有眼.

设与其某眼相应的对集为$\{x_1y_1', x_2y_2', \cdots, x_\gamma y_\gamma'\}$(此处设 $X_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_\gamma\}$). 同理若对每个 $y\in Y_1$, 令

$$\Delta' y = \Gamma^{-1}y - X_1,$$

则 $u_{Y_1}=\{\Delta' y\}_{y\in Y_1}$ 亦为活系. 设 $Y_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_{\alpha-\gamma}\}$, 并设与其某眼相应的对集为$\{x_1'y_1, x_2'y_2, \cdots, x_{\alpha-\gamma}'y_{\alpha-\gamma}\}$. 由二系的令法知此二对集必无公共顶点, 从而合并此二对集便得到了满足要求的 u_X 的对集.

当然, 有了 König 定理之后, 我们知道适才从极大对集出发作的负荷集恰就是极小负荷集, 而从极小负荷集出发所得到的对集也正是极大对集.

§5 集合的分解和群的分解

假定 Ω 是任意的抽象集合, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 Ω 的两两不相交的非空子集, 若其并等于全空间(即 Ω), 则记作

$$\Omega = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

并称 $\mathscr{A}=\{A_i\}$ 为集合 Ω 的一个 n-分解. 从每个 A_i 中任取一元 x_i 所作成的集合$\{x_i\}$便说是此分解的一个代表组. 假定另外有

$$\Omega = B_1 + B_2 + \cdots + B_n,$$

$\mathscr{B}=\{B_i\}$ 也是 Ω 的一个 n-分解. 那末便产生了这样的问题, 当两种分解 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 满足什么条件时才能保证存在共同的代表组. 实际上应用 Hall 定理我们很容易找到两种分解能有共同代表组的充分必要条件. 这就是

定理 4 分解 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 存在有共同的代表组的充分必要条件是: 对分解 $\mathscr{A}$ 中的任何 k 个($1\leqslant k\leqslant n$)集合的并只能包含在分解 $\mathscr{B}$ 中不少于 k 个集合之中, 换句话说, 分解 $\mathscr{B}$ 中

的任何 k 个集合的并不可能包含了分解 $\mathscr{A}$ 中的多于 k 个集合的并.

首先让我们对定理的条件略加解释. 虽然如果定理成立,那么从定理本身就可直接推出定理的条件是对称的:即当分解 $\mathscr{A}$ 相对于分解 $\mathscr{B}$ 满足此条件时,则分解 $\mathscr{B}$ 也必须相对于分解 $\mathscr{A}$ 满足此条件,但我们仍愿先给出这断言的直接证明. 假定 $\mathscr{A}$ 中的任何 k 个集合的并确实不可能包含在 $\mathscr{B}$ 中的少于 k 个的集合之中,那么 $\mathscr{B}$ 中的任何 k 个集合的并确实也不可能包含在 $\mathscr{A}$ 中的少于 k 个集合之中. 如若不然,无妨设

$$\bigcup_{i=1}^{k} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{l} A_i,$$

其中 $l<k$,则于上式两端(在 Ω 中)取余集,立得

$$\mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \supset \mathscr{C}\left(\bigcup_{i=1}^{l} A_i\right),$$

此即

$$\bigcup_{i=k+1}^{n} B_i \supset \bigcup_{i=l+1}^{n} A_i,$$

而 $n-l>n-k$,这就与假设条件矛盾.

现在转来证明定理. 对每个 A_i,令

$$\Gamma A_i = \{B_j \mid B_j \cap A_i \neq \phi\},$$

则甚易验证分解 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 有共同代表组这件事就等价于集系 $\{\Gamma A_i\}$ 有眼,从而据 Hall 定理知此事的充要条件是 $\{\Gamma A_i\}$ 为活系,而本定理所说的条件恰就是系 $\{\Gamma A_i\}$ 为活系的定义.

对于 Ω 恰好包含有 nm 个元素的特殊情形. 如果 n-分解 $\mathscr{A}$ 中的每个集合 A_i 和 n-分解 $\mathscr{B}$ 中的每个 B_i 都恰好包含 m 个元素,则定理的条件显然满足,于是有

推论 1 如果 $|\Omega|=nm$, $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 是 Ω 的任何两个满足条件:"对所有的 i,有 $|A_i|=|B_i|=m$"的 n-分解,则 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 必

有共同代表组.

现在假定 $\Omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)$是一些正实数的集合, 每个 ω_i 都是正实数, 即使 ω_i 与 ω_j 都表示同一个正实数但仍认为是 Ω 中的不同元素. 假定 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 Ω 的两个 n-分解, 如果对任何 k 皆有

$$\sum_{\omega_i \in A_k} \omega_i = \sum_{\omega_i \in B_k} \omega_i = \alpha \quad (\text{常数}),$$

于是包含在任何 l 个 A_k 中的所有 ω_i 的和为 $l\alpha$, 因而这些 ω_i 就不可能被少于 l 个的 B_k 所包含, 定理 4 的条件自然满足, 于是得到

推论 2 对于正实数集合 Ω 的两种分解 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$, 若对于分解中的每个集合所包含的实数的和都恒等于同一常数, 则这两种分解必有共同代表组.

推论 1 在群论中有一个有趣的应用. 如所周知, 若 H 是有限群 G 的一个子群, 则存在两组元素 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 和 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 使得 G 可按 H 表成左陪集和右陪集的和集:

$$G=a_1H+a_2H+\cdots+a_nH=Hb_1+Hb_2+\cdots+Hb_n. \quad (6.5)$$

这里 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 与 $\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ 称为群 G 按 H 分解的左代表组与右代表组. 一般说来, 这两组代表未必相同. 但 O. Ore 曾证明下述定理.

定理 5 设 H 是群 G 的子群, 则存在一个共同代表组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 使得 G 可表示为

$$G=x_1H+x_2H+\cdots+x_nH=Hx_1+Hx_2+\cdots+Hx_n. \quad (6.6)$$

证明 如(6.5)所示, 当群 G 按两种方式表成 n 个不相交的陪集之和时, 因各 a_iH 与 Hb_i 都包含与 H 同样多的元素, 故根据推论知必存在共同的代表组 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, 在适当

的调换次序后可有

$$x_1\in a_1H,\ x_2\in a_2H,\ \cdots,\ x_n\in a_nH;$$

$$x_1\in Hb_1,\ x_2\in Hb_2,\ \cdots,\ x_n\in Hb_n,$$

既然 $x_i\in a_iH$, 故有 $\xi\in H$, 使 $x_i=a_i\xi$, 因此

$$x_iH=(a_i\xi)H=a_i(\xi H)=a_iH.$$

同理可证 $Hx_i=Hb_i$, 由此代入(6.5)便证得(6.6).

推论 2 在矩阵论中也有一个有趣的应用. 对于由非负实数所组成的 n 阶方阵 $P=(p_{ij})$ 称为是双随机的, 如果它的任何一行和任何一列所有元素的和都等于 1.

对于一个给定的双随机矩阵 P, 假定它有 m 个不为 0 (即正的)的元素, 按照任意的次序标作 $\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_m$. 令 Ω 便是这些 ω 的总集. 令 A_k 为第 k 行所包含的 ω_i 的集合. B_k 为第 k 列所包含的 ω_i 的集合. 则 $\sum\limits_{\omega_i\in A_k}\omega_i=\sum\limits_{\omega_i\in B_k}\omega_i=1$. 这表明 n-分解 $\mathscr{A}=\{A_k\}$ 和 $\mathscr{B}=\{B_k\}$ 满足推论 2 的条件, 于是两种分解有一共同的代表组, 假定其中作为 A_k 的代表的同时也是 B_{i_k} 的代表, 则就有

$$\prod_{k=1}^{n}p_{ki_k}\neq 0,$$

于是得到

定理 6 在双随机矩阵 P 的行列式展开式中必有不为零的项.

应用定理 6 可以很容易给下面的 Birkhoff-Von Neumann 定理以一种十分简单的证明.

定理 7 每一双随机矩阵, 都是排列矩阵的一个重心.

所谓排列矩阵是指每行每列恰有一个元素为 1, 其它元素皆为 0 的矩阵. 所谓重心是指存在 k 个排列矩阵 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_k$ 及和为 1 的 k 个非负实数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ 使有

$$P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\cdots+\lambda_k P_k.$$

证明 由于 P 的展开行列式中至少有一项不为零，设项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}\neq 0$. 取 $\lambda_1=\min\{a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{ni_n}\}$，令 P_1 表示第 k 行第 i_k 列为 $1(1\leqslant k\leqslant n)$ 的排列矩阵，则

$$R=P-\lambda_1 P_1$$

仍是一个各行各列的和均为常数的非负数元矩阵. 如果这常数不为零，则 R 的行列式展开中仍有不为零的项，那么便按上法继续分解. 最后得

$$P=\lambda_1 P_1+\lambda_2 P_2+\cdots+\lambda_k P_k+R,$$

如果 R 的行列式展开中再没有不为零的项则除非是 R 的所有元素皆为 0. (因为 R 仍是各行的和、各列的和皆为常数的矩阵.)

于是取第一行的元素的和即得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j}=1=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k.$$

定理证毕.

§6 偶图的色级

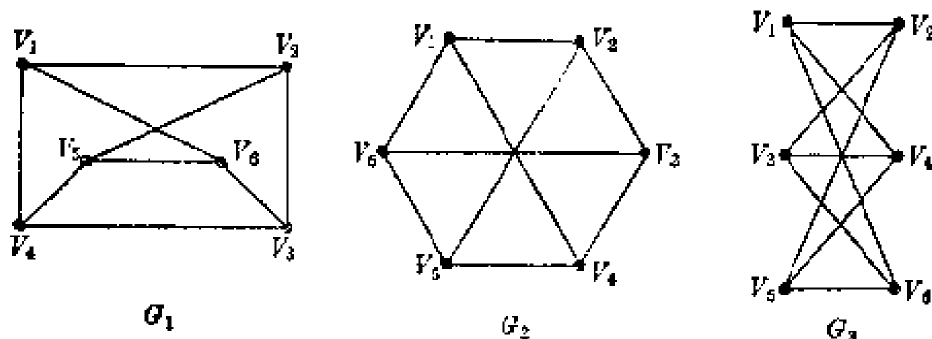
对任何一个图，具有下面两条性质的整数 q 称为是图的色级:

1) 可以用 q 种不同的颜色，涂染图的每一边而使相邻的边(即有共同顶点的边)都具有不同颜色.

2) 上面的情况不可能用 $q-1$ 种颜色来达到.

“色级”是图论中的一个重要概念. 关于图的色级问题是个复杂的问题. 但我们此处只讨论偶图的色级，对于这种特殊的图却有很简单的结论.

有些图，初看起来不象偶图，但实际上却可以化作(或同构于)某一偶图.



例如图 G_1，图 G_2，按这种画法(注意图中任何两线的交点，凡未画黑点的均非图的顶点)不易看出它们是偶图. 而当我们一旦将 V_1，V_3，V_5 和 V_2，V_4，V_6 分别取作两组而将其画成图 G_3 的形状时，则一眼可见实际上真是偶图. 由于按图的定义，不过是一些点，和规定好某些固定的点对之间有连线(即边)，因而上面三个图形实际上画的是同一个偶图.

关于偶图，有一个属于 König 的十分简单的判别法则，那就是：一个图，当且仅当它的任何一个圈都只含偶数个边时才是偶图. (所谓圈，乃是指依次邻接的一些边，且使起始的顶点和最终的顶点相重合的.)这个定理的证明并不难，但它已超出本书的研究范围，同时为避免牵涉过多的概念，这里不去证了.

对于偶图

$G=(X, Y, \Gamma)$ (或相应的集合系 $u_X=\{\Gamma x\}_{x\in X}$).

令 $\quad m=\max\{|\Gamma x|, |\Gamma^{-1}y| \mid x\in X, y\in Y\}$,

由于在图 G 中至少有一个 x 顶点或 y 顶点使得同它连接的有 m 条边，因此不可能用少于 m 种的颜色将它们隔离开，但是我们也可证明确实存在着 m 种颜色涂染法，使得任二邻边皆被染成不同颜色，从而就有

定理 8 偶图 $G=(X, Y, \Gamma)$的色级等于上面等式中的 m.

为了证明此定理,需先有下面的辅助定理.

辅助定理 在偶图 G 中一定存在使用了所有使得$|\Gamma x|=m$ 和$|\Gamma^{-1}y|=m$ 的顶点 x 和 y 的对集.

此处还需引进一个图论中的概念. 在一个图中与某个固定顶点相关联(即连接)的边的数目称为该顶点的度. 那也就是说对 $x\in X$, x 的度为$|\Gamma x|$,对 $y\in Y$, y 的度为$|\Gamma^{-1}y|$. 上面所定义的 m 也就可以称为是图中顶点的最大度,简称为最大度.

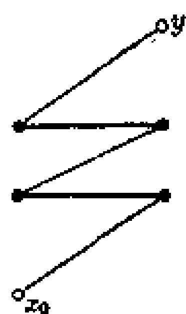
现在假定上面的辅助定理已经成立, 看看如何用它来证明定理 8. 假定给定了 m 种不同的颜色, 根据辅助定理, 先从图中找出一个使用了所有度为 m 的顶点的对集. 用第一种颜色去涂染此对集中的各边, 那么由未被涂色的边所组成图的最大度便是 $m-1$ 了. 用第二种颜色去涂染此图中使用所有度为 $m-1$ 的顶点的对集中的各边, 那么余图的最大度便是 $m-2$ 了. 如此涂下去,每涂一次,图的最大度便减少 1. 因此用 m 种颜色足以将图的各边涂完,因为每次涂同一种颜色的都是属于对集中的边,从而任二同色边不可能相邻.

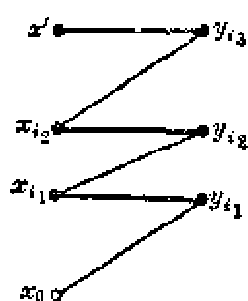
关于辅助定理, 在 C. Berge 的书中载有证明. 我们把它加强成下面的定理 9, 并给出一种新的证明. 定理 9 本身也是很有意义的.

定理 9 假定偶图 G 的最大度为 m,那么在 G 中一定存在一组使用了所有度为 m 的顶点的极大对集.

证明 任取 G 的一个极大对集, 设为 $f=\{x_1y_1, x_2y_2, \cdots, x_\beta y_\beta\}$, 令 $X_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_\beta\}$, $Y_1=\{y_1, y_2, \cdots, y_\beta\}$, 并记 $f(x_i)=y_i(i=1, 2, \cdots, \beta)$. 则 Y_1 便是集合系 u_X 的一个大

眼，同时是子系 u_{X_1} 的一个眼. 令 $X'=\{x|x\in X, |\Gamma x|=m\}$，即图 G 中所有度为 m 的 x 顶点的集合. 我们首先要调整此大眼，使对凡属于 $X'-X_1$ 中的顶点均换入 X_1 中来，而 Y_1 的集合则保持不变. 在偶图 G 中将对集 f 中的边全画成粗边，而其余的边则画成细边. 任取一个 $x_0\in X'-X_1$，则从 x_0 出发的共有 m 条细边. 这些细边的 y 终点必然全属于 Y_1，即 $\Gamma x_0\subset Y_1$. 因为否则的话在极大对集中就可增加一个新边，这不可能. 同理可知，当我们从 x_0 出发去作细边、粗边的交错链(即由细边、粗边交错连接而成)时，也绝不可能遇到上图的这种情况，即此链在经过 Y 中、X 中的某些点之后以某一细边遇见不属于 Y_1 的 Y 中的点. 因为如果发生这种情况的话，那么用细边去替换链中的粗边，则又得到了更大的对集.





现在假定有某个交错链在依次经过了 $X_1\cap X'$ 中的若干个顶点 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_s}$ 之后终于以某条粗边首次遇见不属于 X'的顶点 x'，那么作链的过程就此停止. 对所得到的交错链，在其中将粗边换作细边，细边换作粗边，则新的粗边集也是极大对集，它仍然使用了 Y_1 中的所有顶点，但所用的 X 中的顶点集则为 $X_1\cup\{x_0\}-\{x'\}$，这就比原对集所用的 X' 中的顶点多用了一个. 这样我们便可把 X' 中的顶点依次全都换入 X_1 中来. 但是还需证明所说的这种交错链必定存在. 这可以用反证法去证. 如果所说的这种交错链不存在，那就只能是交错链在经过若干个 X' 中的顶点 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}$ 之后总发现从 x_{i_k} 出发的细链全都回到了已经

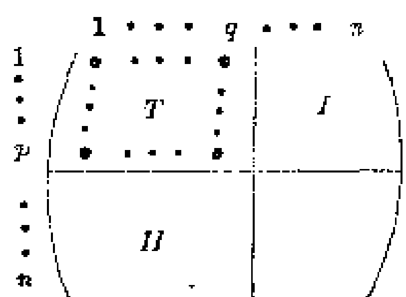
用过的 Y 顶点. 这就必然是在 X' 中有一组顶点 $x_{j_1}, \cdots, x_{j_l}$ 使得

$$\Gamma\left(\bigcup_{s=1}^{l}\{x_{j_s}\} \cup \{x_0\}\right)=\{y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_l}\}.$$

这样从 $x_0, x_{j_1}, \cdots, x_{j_l}$ 这 $l+1$ 个点, 每点发出 m 条边, 共发出了 $(l+1)m$ 条边; 而接收这些边却只有 Y 中的 l 个顶点. 因此必然至少有一个 y 顶点接收了多于 m 条边. 这不可能. 这就证明了所说的交错链的存在性.

注意到在上面的对换过程中对使用的 Y 中顶点的总集并无变化, 因而在 X' 中顶点全换入 X_1 之后, 用同样办法可再将 Y 中度为 m 的顶点全换入 Y_1 之中, 这就完成了所要求的对集.

现在我们来讲述定理 9 在拉丁方理论上的一个奇特的应用.



由 n 个不同元素 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 所组成的 $n\times n$ 方阵称为是一个拉丁方, 如果它的任何一行或一列都没有相同元素出现的话. 现在就有这样的问题, 假定已给一个 $p\times q$ 的矩阵, 问它能扩大成一个 $n\times n$ 拉丁方的充要条件是什么? 此问题的答案就是定理 10.

定理 10 设 T 是一个由 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 这 n 个元素所组成的 $p\times q$ 矩阵, 且任何一行和任何一列都没有相同的元素, 以 $m(y)$ 表示元素 y 在 T 中出现的次数, 则当且仅当对每个 $y_k (k=1, 2, \cdots, n)$ 都有

$$m(y_k) \geqslant p+q-n$$

时, T 才能扩充成一个 $n\times n$ 的拉丁方.

证明 条件的必要性是很容易证明的．假定已经扩充成了拉丁方，那么 y_k 在前 p 行总共出现 p 次，因此若在 T 中出现了 $m(y_k)$ 次，那么在 I 中就应该出现 $p-m(y_k)$ 次．同理，由于 y_k 在前 q 列要出现 q 次，所以在 II 中就要出现 $q-m(y_k)$ 次．但在此三部分中出现的总次数也不超过 y_k 在整个矩阵中出现的次数 n，因此

$$m(y_k)+(p-m(y_k))+(q-m(y_k))\leqslant n,$$

此即
$$m(y_k)\geqslant p+q-n.$$

现在来证明充分性．取

$$X=\{1, 2, \cdots, p\},\quad Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}.$$

对每个 $i\in X$，令 Γ_i 为在 T 的第 i 行中不出现的那些 y 的集合，则显然有 $|\Gamma i|=n-q$，而 $|\Gamma^{-1}y_k|=p-m(y_k)\leqslant n-q$（对每个 $y_k\in Y$）．我们首先证明 $u_X=\{\Gamma i\}_{i\in X}$ 是活系．事实上对任何 $A\subset X$，当将不同的 Γi 中出现的同一个 y 皆看成是彼此不同的 y 时，那么 ΓA 就包含了 $|A|\times(n-q)$ 个元素，而因为任何 y_k 在 ΓA 中重复的次数都超过 $n-q$ 次，所以 ΓA 中就必须包含了不少于 $|A|$ 个不同的 y_k．这就表明 $|\Gamma A|\geqslant A$．既然 u_X 是活系那么按照定理 9，它就有一个使用了所有使得 $\Gamma^{-1}y_k=n-q$ 的 y_k 的眼．将此眼补成矩阵的 $q+1$ 列，然后再按上面的办法去作新的集合系 u_X，此时就有 $|\Gamma i|$ 和最大度都是 $n-q-1$ 了．这样用依次找眼的办法便可一直作完扩大矩阵的前 p 行．因为对作得的 $p\times n$ 的矩阵 $\overline{T}$ 有

$$\overline{m}(y_k)=p=(p+n)-n,$$

$\overline{T}$ 仍然满足定理的条件，将其取转置之后便可再进行同样的扩充．

第 7 章

Ramsey 定理和 Dilworth 定理

在组合数学中有三个基本的存在定理，除了前章中所讲的关于集合的相异代表组的存在定理——Hall 定理之外，另外两个就是本章中所要讲述的，被称之为广义"鸽洞原理"的 Ramsey 定理和关于"半序集"分解为不相交链的 Dilworth 定理. 它们都涉及某些特定的"关系结构"的存在性问题. 因为这些关系结构的分析在一些组合数学问题里，例如在区组设计与图论的一些问题中也常会遇见，并且在数学的不同分支中所提出的个别问题，也往往能演化出或归结成相应的关系结构(参见前章关于拉丁方构造和双随机矩阵性质的举例)，所以上述三个定理很自然地成为组合分析中极为有用的重要工具.

从原则上说来，这些定理的叙述和论证都几乎不需要任何预备知识. 如果愿意的话，它们的证明都可在不超越普通的数学归纳法的范围来进行. 那就是说，不仅数学工作者、大学的数学系学生应该能作，即使是中学生学过了数学归纳法也应该能作，但事实却远非如此简单. 由于这些关系结构所涉及的对象性质是如此普遍和庞杂，往往使人茫无头绪，无从措手. 要想将一团乱麻整理成序，就需要有化繁为简、剥茧抽丝的本领和耐心. 掌握这些定理会对我们解决组合数学问题增加了新的工具，同时学习和研究其证明方法也会对训练我们的抽象思维能力，提高我们的逻辑推理能力，一句话，对开发智力是有好处的.

§1 Ramsey 定理和 Ramsey 数

1958 年 6、7 月号美国数学月刊上登载过这样一个有趣的题目："证明任何 6 个人的聚会，其中总会有 3 个人互相认识或有 3 个人彼此都不认识"。

初看起来，这不象个数学题目。但是我们要说：它是！而且很有意思，切不可轻易放过，失之交臂。在略经分析之后，可以给出它的严格而优美的证明。

让我们在平面上取定 6 个点 a, b, c, d, e, f 分别代表这 6 个人。将 6 个点两两连线，共可连出 $C_6^2=15$ 条线。这些点和线便构成了一个图（这种图——任何两个顶点之间都存在连线，即边——称为**完全图**，具有 p 个顶点的完全图记作 K_p，并称为 p-完全图，则我们这里作的便是一个 6-完全图 K_6）。在此图中代表任何两个认识的人的顶点之间的连线涂以红色，反之，对任何两个代表不相识的人的顶点之间连线则涂以蓝色。于是上面的问题立刻可以等价变形为：对于图 K_6 的一个任何的红、蓝二色涂边法，必然是或者从中能找到一个三边全红的三角形，或者能找到一个全蓝的三角形。换言之，对任何一种不存在全红三角形的涂法，一定有全蓝的三角形。

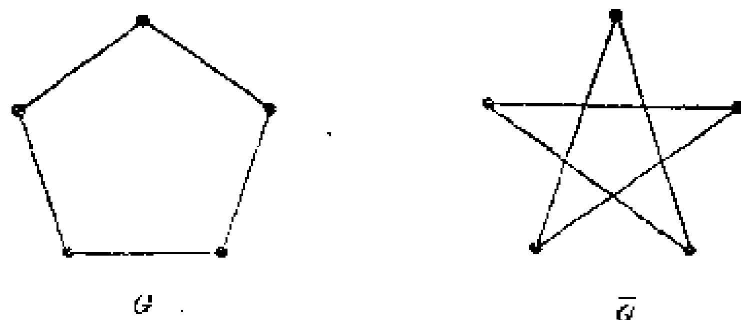
事实上，由于图中有 6 个点，那么从任何一点，譬如说 a 点，发出的就有 5 条线，5 条线涂成两色则至少有 3 条是同一颜色的（这就是最简单情形的"鸽洞原理"或称为"抽屉原则"）。无妨设 ab, ac, ad 都是红色边，现在再转来看 b、c、d。这三点彼此联结的三条边，如果其中有一条譬如 bc 也是红边，那么我们便得到全是红边的 $\triangle abc$；否则的话，$\triangle bcd$ 本身就

是一个全蓝的三角形. 不管出现什么情形，我们的目的——寻找出一个同色边的三角形——总会达到.

在图论的语言中，对于一个给定的图 G，以 G 中的某些顶点为顶点，某些边为边的图 G_1 则称为是 G 的"子图"(如果 G_1 使用了 G 的全部顶点为顶点，则 G_1 特别称为是"生成子图"). 对于一个图 G，它的"补图" $\overline{G}$ 乃是如此定义的一个图，它以 G 的顶点为顶点，对任何两个顶点来讲，当且仅当它们在 G 中没有连线(边)时在 $\overline{G}$ 中就有连线. 这样，如果 G 是一个具有顶点个数为 n 的图，则 G 和 $\overline{G}$ 便恰好组成了没有公共边的且其并为 K_n 的 K_n 的两个子图. 对于上述的涂色问题来讲，倘若我们将红边与顶点构成的图记作 G，则蓝边与顶点构成的图便是 $\overline{G}$. 我们的命题又可以用图论的语言叙述成：

对于完全图 K_6 的任何一个子图 G 来讲，或者它本身，或者它的补图 $\overline{G}$ 中一定包含一个子图 K_3(即三角形).

那么将命题中的 K_6 换成一般的 K_n 是否仍然成立呢？很明显，既然 $n=6$ 对，则对任何 $n>6$ 也对. 而当 $n<6$ 时，由图可知，这样的一个 5 点图(或 K_5 的一个子图) G，它和它的补图 $\overline{G}$ 都不包含三角形.



这样一来，6 便是这种整数 n 中的最小者，使得对任何一个 n 点图 G，或者它本身包含一个子图 K_3，或者它的补图包含一个子图 K_3.

现在我们就可以根据上面的考虑提出一般化的问题：对于给定的两个整数 p 和 q，是否存在一个正整数 N，使得对 K_N 的任何子图 G，或者 G 中包含一个子图 K_p，或者它的补图 $\bar{G}$ 中包含一个子图 K_q？这种 N 的存在性正是下面所要讲的 Ramsey 定理的结论．而对于满足要求的最小的 N 则记作 $r(p, q)$，称之为 Ramsey 数．显然有 $r(p, q)=r(q, p)$．上面的讨论告诉我们 $r(3, 3)=6$．

如果我们把 K_N 的顶点集合记作 $V=\{V_1, V_2, \cdots, V_N\}$，则它的边集合 X 便由所有形如 $\{V_i, V_j\}$，$i\neq j$ 的"点偶"(共 C_N^2 个)所组成．对任何一个 K_N 的子图 G，G 的边的集合 α 和 $\bar{G}$ 的边的集合 β，恰好将 X 分成不相交的两部分．即 $\alpha\cap\beta=\phi$，$\alpha\cup\beta=X$．于是适才提出的问题，用集合论的语言又可以叙述成这样：对给定的正整数 p 和 q，是否总存在一个 N，使对一个 N 元集合 $S=\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，当将 S 的所有二元子集的族任意地分作互不相交的两部分 α 和 β 时，不是 S 中含有某个 p 元子集 A 使得 A 的二元子集都属于 α(作为 α 中的元素)，就是 S 中含有某个 q 元子集 B 使得 B 的二元子集都属于 β？

Ramsey 把上述问题推得更广，他不是仅限于考虑二元子集，而是针对任何固定的正整数 r，考虑 S 的所有 r 元子集的族 T 而提出同样的问题．他在 1930 年发表的题为"形式逻辑中的一个问题"的重要论文中对此问题作出了肯定的回答．这就构成了现代组合数学中所说的 Ramsey 定理．近年来随着图论和计算机科学的发展愈来愈显示出它的应用的广泛性．

Ramsey 定理 对于任意指定的正整数 $p\geqslant r$，$q\geqslant r$，$r\geqslant 1$．总存在一个只依赖于 p，q，r 的正整数 $n(p, q, r)$，使

得当集合 S 的元素个数 $N\geqslant n(p, q, r)$ 时，对 S 的 r 元子集族 T 作任意分解 $P_r(S)=\alpha+\beta$ 后，则或者 S 中有某个 p 元集，其一切 r 元子集都属于 α；或者 S 中有某个 q 元集，其一切 r 元子集都属于 β.

在上述定理中，正整数 $n(p, q, r)$ 中的最小者记作 $R(p, q, r)$，并称之为 Ramsey 数，而此前所提到的（在图论中通常所说的）Ramsey 数 $r(p, q)$ 实际乃是当将 r 取作 2 时的特例，即 $r(p, q)=R(p, q, 2)$.

根据 Ramsey 数的定义，容易直接验明：

$$R(p, r; r)=p,\ R(r, q; r)=q,\ R(p, q; 1)=p+q-1.$$

例如，就 $R(p, r; r)=p$ 来看，它的意思应该是，对 p 元集 S 的 r 元子集族作任意分解 $P_r(S)=\alpha+\beta$ 后，或者有 p 个元（当集合 β 为空集时）其一切 r 元子集属于集合 α；或者有 r 个元（当 β 非空时）其本身作成的 r 元子集属于 β. 又因为必须有 $R(p, r; r)\geqslant p$，故可断言 $R(p, r; r)=p$. 同理可证 $R(r, q; r)=q$. 至于最后一式 $R(p, q; 1)=p+q-1$ 更为明显，这就相当于通常所说的"鸽洞原理"或"抽屉原则".比方，把 $p+q-1$ 个鸽洞任意分作两组，无论你是如何的分法，要不是其中的第一组有不少于 p 个鸽洞，就一定是第二组至少含有 q 个鸽洞.

现在就让我们以等式

$$R(p, q; 1)=p+q-1,\ R(p, r; r)=p,\ R(r, q; r)=q$$

为出发点，对三个参数 p, q, r 利用多重归纳法来给出 Ramsey 定理的证明.

今假定定理对 $r-1$ 以及任意整数 $p^*\geqslant r-1$, $q^*\geqslant r-1$ 已知为真；又假定对 r 而言，已知定理对任意 $p', q\geqslant r$ $(p'<p)$ 及 $p, q'\geqslant r (q'<q)$ 均为真. 为完成归纳证明，只须证明在上

述条件下可以推出合乎定理结论要求的 $R(p, q; r)$ 仍然是个有限数.

根据归纳法假设, 已经知道

$$p_1 = R(p-1, q; r) \text{ 和 } q_1 = R(p, q-1; r)$$

都是有限正整数. 因此如果我们能够证明必有不等式

$$R(p, q; r) \leqslant R(p_1, q_1; r-1) + 1,$$

亦即不等式

$$R(p, q; r) \leqslant R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1,$$

则 $R(p, q; r)$ 的存在性(即有限性)也就不成问题了.

记 $N = R(p_1, q_1; r-1) + 1 = N^* + 1$. 设 S 为 N 元集合, 从中删去一个特定元 a 后是一个含有 $N^* = N-1$ 个元的集合 $S^* = S - \{a\}$. 今对 S 的 r 元子集族 T(它包含有 $\binom{N}{r}$ 个元素)作任意分解

$$P_r(S) = \alpha + \beta.$$

在 α 中考虑所有那种元素, 它们作为 S 的 r 元子集是包含 a 的, 从这每个子集中删除 a 之后得到的乃是 S^* 的 $r-1$ 元子集, 用这些子集所构成的集合(或称为集合族)则记作 α^*, 类似地去定义 β^*, 于是 α^* 和 β^* 便作成了 S^* 的所有 $r-1$ 元子集的一分解, 记作

$$P_{r-1}(S^*) = \alpha^* + \beta^*,$$

并直接称它为与上述分解相对应的减元分解(它既依赖于分解 $P_r(S)$, 也依赖于所取的特定元 a).

现在让我们对上述不等式的正确性进行论证. 因为 $N^* = R(p_1, q_1; r-1)$, 故知 S^* 中或者有 p_1 个元, 使其一切 $(r-1)$ 元子集都属于 α^*(记住此时由这 p_1 个元的任何 $(r-1)$ 个元的子集再加上 a 所作成的 r 元子集便都属于 α), 或者有

q_1 个元，使其一切$(r-1)$元子集都属于 β^*. 因两种情形完全对称，故只就前一情形进行讨论.

今设 S^* 中确实有 p_1 个元，使一切$(r-1)$元子集都属于 α^*. 设这 p_1 个元所作成的 S 的子集为 S'，则从 S 的 r 元子集族 T 的分解 $P_r(S)$ 以自然的方式就诱导出关于 S' 的 r 元子集族 T' 的一个分解:

$$P_r(S')=\alpha'+\beta' \quad (\alpha'\subset\alpha,\ \beta'\subset\beta).$$

现在因为 $|S'|=p_1=R(p-1,\ q;\ r)$，故对于分解 $P_r(S')$ 而言，或者存在 S' 中的 q 个元，使其一切 r 元子集全属于 $\beta'\subset\beta$; 否则就必定有 S' 中的某 $p-1$ 个元，使其一切 r 元子集全属于 $\alpha'\subset\beta$. 如果出现前一种情形，则存在的 q 个元即已符合定理要求. 如果出现后一情形，则当将 a 加入这$(p-1)$个元之后，对所得到的 p 个元来讲，其一切 r 元子集不外是从$(p-1)$个元中取 r 个作成的(这时它属于 $\alpha'\subset\alpha$)，或是由$(p-1)$个元的某$(r-1)$元子集加上 a 所作成的(根据前面括弧中提醒的注意，它也属于 α)，因而确有这 p 元集的所有 r 元子集都属于 α.

这样我们便证明了定理所要求的结论对 N 元集合 S 是成立的，N 便是 $R(p,q;r)$的上界. 因此 Ramsey 数 $R(p,q;r)$ 的存在性获证，归纳证明遂告完成.

Ramsey 数 $R(p,q;r)$ 具有深刻的组合意义. Ramsey 定理只是保证了 Ramsey 数的存在性，并没有给出这种数的求法. 寻找具体的 Ramsey 数是一件非常艰难的事情，除了 $r=1$ 的平凡情形之外，即使对于 $r=2$，迄今为止，对于

$$r(p,\ q)=R(p,\ q;2)$$

所能求出的也仅有少数的几个，已知的 Ramsey 数 $r(p,\ q)$有如下表所示:

q	p					
	2	3	4	5	6	7
	$r(p, q)$					
2	2	3	4	5	6	7
3	3	6	9	14	18	23
4	4	9	18			

§2 Ramsey 定理的推广和应用

Ramsey 定理还可以进一步推广，其"推广"的证明比起它本身的证明来却要容易得多．推广后的定理可叙述如下：给定正整数 $p_1, p_2, \cdots, p_t$ 及 r 满足条件

$$p_1 \geqslant r,\ p_2 \geqslant r,\ \cdots,\ p_t \geqslant r,$$

则必存在一个有限的(尽可能小的)正整数 $R=R(p_1, \cdots, p_t; r)$，使对具有 R 个元素的集合 S 的一切 r 元子集所成子集族的任意分解

$$P_r(S)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_t$$

说来，S 中总有某 p_i 个元素 $(1 \leqslant i \leqslant t)$，其一切 r 元子集都属于 α_i (也即对某个 i，有这样的 p_i 个元，使其 r 元子集都在族 α_i 中)．

这个定理也要用归纳法证明．对 $r=1$，易见

$$R(p_1, p_2, \cdots, p_t; 1)=p_1+p_2+\cdots+p_t-t+1.$$

对 $t=1$，显然有 $R(p; r)=p$．对 $t=2$，$R(p_1, p_2; 2)$ 的存在性由 Ramsey 定理已得证．下面我们就 $t=3$ 的情形加以分析．

令 S 的 r 元子集族 T 作任意的三部分分解 $P_r(S)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$；或者记作 $T=\alpha_1+\beta$，其中 $\beta=\alpha_2+\alpha_3$．于是当 S

的元素个数为

$$N=R(p_1, R(p_2, p_3; r); r)$$

时，由 Ramsey 数的定义($t=2$ 的情形)得知 S 中至少会有 p_1个元，其一切 r 元子集属于 α_1 族；或者 S 中至少会有 $n_1=R(p_2, p_3; r)$个元，其一切 r 元子集都属于 β 族(即 n_1 个元的全体 r 元子集作成 β 族的一个子族 $\gamma\subset\beta$)，从而有相应的分解 $\gamma=\alpha_2'+\alpha_3'$，此处 $\alpha_2'=\gamma\cap\alpha_2$，$\alpha_3'=\gamma\cap\alpha_3$．因此对此后一种情形而言，$n_1$ 个元中将有 p_i 个元使其一切 r 元子集属于 $\alpha_i'\subset\alpha_i$(或者 $i=2$，或者 $i=3$)．这就证明了所述的推广对 $t=3$ 的情形确实成立，并且由此推知

$$R(p_1, p_2, p_3; r)\leqslant R(p_1, R(p_2, p_3; r); r).$$

上述论证方式(按归纳步骤)很容易推广到 t 取任意正整数的情形，故知普遍命题成立．

作为 Ramsey 定理的应用，Erdös 和 Szekeres 曾利用基本不等式和 $R(p, q; 1)=p+q-1$ 的简单事实推出了关于 Ramsey 数 $r(m, n)=R(m, n; 2)$的界的简单估计．

例 1 对于 $r(m, n)$恒有

$$r(m, n)\leqslant\binom{m+n-2}{m-1}.$$

证明仍须用数学归纳法．已知起始条件

$$r(m, 2)=r(2, m)=m=\binom{m+2-2}{2-1}$$

显然成立．今假定对于 $r(m-1, n)$和 $r(m, n-1)$不等式成立，则利用基本不等式

$$R(p, q; r)\leqslant R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1)+1$$

在其中取 $p=m$，$q=n$，$r=2$ 即得

$$
\begin{aligned}
r(m, n) &\leqslant R(r(m-1, n), r(m, n-1); 1)+1 \\
&= r(m-1, n)+r(m, n-1)-1+1 \\
&\leqslant \binom{m-1+n-2}{m-2}+\binom{m+n-1-2}{m-1} \\
&= \binom{m+n-2}{m-1},
\end{aligned}
$$

由此完成归纳证明.

例 2 (Erdös-Szekeres) 有这样一个有趣命题:假设整数 $m\geqslant 3$,则存在一个整数 N_m,在 $n\geqslant N_m$ 时,若平面内的 n 个点无 3 点共线,那么总有某 m 点可连成一个凸 m 边多边形(自然 $N_m\geqslant m$).

为证明上述命题,先证两条引理.

引理 1 若平面内 5 点没有 3 点共线,则其中必有某 4 点是一凸 4 边形的 4 个顶点.

把 5 点间都连上线,则此 10 条线的最外边一定是一个凸多边形. 若是 4 边形或 5 边形,则引理已经成立. 若是三角形,则必有两点位于三角形内. 由于没有 3 点共线,所以三角形的 3 顶点必然位于此两点所连成的直线的两侧. 这样只要把同一侧的两点同三角形内的两点相连即可得到一个凸 4 边形.

引理 2 若平面内的 m 个点,其中任何 3 点不共线,且以此 m 点的所有 4 点子集作顶点的四边形都是凸 4 边形,则此 m 点必是一凸 m 边形的 m 个顶点.

将 m 点彼此相连共得 $\binom{m}{2}=m(m-1)/2$ 条直线,假设其外周组成一个 q 边的凸多边形,其顶点为 $V_1, V_2, \cdots, V_q$. 若 m 点中有一点落在上述凸 q 边形内,则它必然落在

$\triangle V_1V_2V_3$, $\triangle V_1V_3V_4$, $\cdots$, $\triangle V_1V_{q-1}V_q$ 的某一个之内，但这样就要出现一个凹 4 边形．故在凸 q 边形之内实不可能再有 m 点中的任何点，也即 $q=m$．

现在我们来证明例 2 中的命题．于 $m=3$ 的情形命题显然成立．因此假定 $m\geqslant 4$．

为应用 Ramsey 定理，我们令

$$n\geqslant N_m=R(5,\ m;\ 4).$$

这里对 n 元集合 S 的"4 元子集族"(即"4 点子集"作成的族)不是象以前用颜色来区分，而是按照它们所构成的 4 边形是凹的还是凸的来划分为两个子族．于是 Ramsey 定理断言，或者至少有某 5 个点其一切"4 点子集"组成的 4 边形全是凹的；或者至少有 m 点其一切"4 点子集"组成的 4 边形全是凸的．由引理 1 知前者绝不可能；由引理 2 知后者所说的 m 点必然组成一凸 m 边形．命题证毕．

通过例 2，已经使我们窥知 Ramsey 定理对图论问题研究中应用之一端，至于它在近代图论中的其它种种应用，则超出本书讨论范围，有兴趣的读者可自行查阅有关图论的专著．

§ 3　Dilworth 定理

假定 $P=\{S,\ \sqsubseteq\}$ 为带有序关系 $\sqsubseteq$ 的有限半序集．由 S 中两两不可比的元素所组成的子集称为"不可比集"．包含元素最多的不可比集称为"最大不可比集"．以 M 记最大不可比集中元素的个数．

假定有 P 的 t 条不相交的链 $C_1,\ C_2,\ \cdots,\ C_t$ 使得

$$\bigcup_{i=1}^{t} C_i=S,$$

则称链集$(C_1, C_2, \cdots, C_t)$组成P的一个t-分解，或称P为$C_1, C_2, \cdots, C_t$的和，并记作

$$P = C_1 + C_2 + \cdots + C_t.$$

使得P能存在t-分解的最小整数t记作m。m亦即当将P分解成链的和时所必须用的最少链数。

假定E是P的一个最大不可比集，对于P的任何t-分解，E中的M个元必分别属于分解中的不同的链，于是必须有$t \geqslant M$，从而$m \geqslant M$。

反向的不等式$M \geqslant m$——远非显然——于1950年才被Dilworth所建立，这就是下面的定理。

Dilworth 定理 在将半序集P分解成不相交链(相交亦可)的并时，所需用的链的最少个数m就等于P的最大不可比集中所含元素的个数M。

Dilworth定理的内容很深刻，但他原来的证明过于复杂，这里给出的是经过简化后的证明。在证明之前先来作些分析，假定$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_M\} \subset S$是$P$的任一最大不可比集，则对任何$e \in S - E$，$e$必须至少与$E$中之一元可比(否则$E \cup \{e\}$将是元素个数为$M+1$的不可比集，此与$M$的定义相矛盾)；且若设对某个$e_i \in E$，有$e \sqsubseteq e_i$，则对$E$中的任何$e_j$均必有或者同$e$不可比，或者$e \sqsubseteq e_j$。对此情形，我们记作$e \prec E$。类似地定义$e \succ E$(即$e$同$E$中任何元$e_i$如若可比，则必须有$e \sqsupseteq e_i$，且至少存在一个$e_{i_0} \in E$，使得与$e$可比)。记

$$E' = \{e \mid e \in S - E,\ e \succ E\},$$

$$E'' = \{e \mid e \in S - E,\ e \prec E\}.$$

对于任何的半序集S，由S的全体极大元(或极小元)所组成的集合必定是不可比集，但一般讲来不一定是最大不可比集。如果对于S有某个使得$E' = \phi$的最大不可比集E，则

E 必定由 S 的全体极大元所组成；同样地，若 $E''=\phi$，则 E 必定由 S 的全体极小元所组成．这同时也就表明了使得 $E'=\phi$ 或 $E''=\phi$ 的最大不可比集的唯一性（如果存在的话）．

现在让我们对 S 中元素个数 $|S|$ 用归纳法来给出 Dilworth 定理的证明．

证明 当 $|S|=1$ 或 2 时，定理显然正确．现在假定对某个整数 n，对 $|S|<n$ 的半序集 $P\equiv\{S, \subseteq\}$ 定理皆正确，来证明对满足 $|S|=n$ 的半序集 $P\equiv\{S, \subseteq\}$ 亦正确．分开两种情形：

情形 1° 设半序集 P 存在有使得 E', E'' 均非空的最大不可比集 E．令 $E_1=E'\cup E$, $E_2=E''\cup E$，则 E_1, E_2 的元素均小于 n，按照归纳假设 E_1, E_2 均存在 M-分解．此时 E 为 E_1 的全体极小元同时又是 E_2 的全体极大元．对每个 $e\in E$，e 必定是 E_1 的 M-分解中某链的最小元而同时又是 E_2 的 M-分解中某链的最大元．将如此的二链合而为一，我们自然就得到 P 的一个 M-分解．

情形 2° 倘若半序集 P 不属于情形 1°，那就是对 P 的任何一个最大不可比集均或者 $E'=\phi$ 或者 $E''=\phi$．此时 P 最多有两个不同的最大不可比集（S 的全体极大元的集合和 S 的全体极小元的集合）．如果 P 只有一个最大不可比集 E，从 E 中任取一元 e，则 $S-\{e\}$ 是一个元素个数为 $n-1$ 和最大不可比集的元素个数为 $M-1$ 的半序集．按归纳假设，它可分解为 $M-1$ 个不相交的链之并，再加上由 e 单个元素所组成的链即构成了 P 的一个 M-分解．如果 P 有两个最大不可比集 E_1, E_2，其中 $E_1'=E_2''=\phi$．任取 $e_2\in E_2$，必有某个 $e_1\in E_1$，使得 $e_2\subseteq e_1$．考虑集合 $S-\{e_1, e_2\}$，它的元素个数小于 n，最大不可比集的元素个数等于 $M-1$，因而可分

解为 $M-1$ 个不相交链的并，再加上链 $\{e_2 \sqsubseteq e_1\}$ 便构成了 P 的 M-分解. 证毕.

最后，举一简单例子以表明 Dilworth 定理的应用.

例　试证明在 $m \cdot n+1$ 只实验用的荷兰猪中，要么至少有 $m+1$ 只是代代相传的，要么就有 $n+1$ 只是彼此无亲缘关系的(其中假定 $m>1$, $n>1$).

为证明这个命题，可以把上下代相传的"亲缘关系"理解为"序关系". 于是全体荷兰猪便构成了一个包含 $mn+1$ 个元素的半序集. 现在我们来证明，如果不是存在至少包含 $m+1$ 个元的链，那么就至少会有 $n+1$ 个元是不可比的.

假如链的长度(即链所含元素个数)最大是 m，则因为 $n<\frac{mn+1}{m}<n+1$，故该半序集至少须分解为 $n+1$ 条链的和，即分解链的最小数目不小于 $n+1$. 因此根据 Dilworth 定理，最大不可比集中所包含的元素个数 $M \geqslant n+1$. 这就表明，确有 $n+1$ 只荷兰猪彼此无亲缘关系.

当然，也可以从另一方面来考虑这问题. 假如不可比集的元素最多只有 n 个，则按 Dilworth 定理，$mn+1$ 个元素的半序集可分解为至多 n 条的链，因而从 $\frac{mn+1}{n}>m$，可见必有一条链的长度至少是 $m+1$.

Dilworth 定理对分析研究组合数学中的一些极值问题(特别是"配置问题"中的极值问题)很是有用. 请参考 M. Hall《组合论》的第七章.

附　录

组合恒等式简表

(摘自 H. W. Gould 著《Combinatorial Identities》)

1. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{x}{k}=0,\qquad R(x)>0,$

2. $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k=\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\quad(|x|<1),$

3. $\sum_{k=a}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^a\binom{x-1}{a-1}+(-1)^n\binom{x-1}{n},$

4. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}=(-1)^n\binom{x-1}{n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{k}\right),$

5. $\lim_{n\to\infty}n^{x-r}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{x}{k}k^r=\frac{1}{(r-x)\Gamma(-x)},$

6. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^j=0\quad(0\leq j<n),$

   $=(-1)^n n!\quad(j=n),$

7. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(x-k)^{n+1}=\frac{2x-n}{2}(n+1)!,$

8. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=2^{n+1},$

9. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx=2^n\cos\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n,$

10. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin kx=2^n\sin\frac{nx}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^n,$

11. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cos kx=(-1)^n2^n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n\cos\frac{n(x+\pi)}{2},$

12. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\sin kx=(-1)^n 2^n\left(\sin\frac{x}{2}\right)^n\sin\frac{n(x+\pi)}{2}$,

13. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{k}=2^{n-1}+\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}\frac{1+(-1)^n}{2}$,

14. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{x}{x+k}=\binom{x+n}{n}^{-1}$,

15. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{x+k}{k}^{-1}=\frac{x}{x+n}$,

16. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{n}{k}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,

17. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}=\binom{x+n+1}{n}$,

18. $\sum_{k=1}^{n}\binom{x+k}{k}\frac{1}{x+k}=\frac{1}{x}\left\{\binom{x+n}{n}-1\right\}$,

19. $\sum_{k=a}^{n}\binom{k}{x}=\binom{n+1}{x+1}-\binom{a}{x+1}$,

20. $\sum_{k=j}^{n}\binom{k}{j}=\binom{n+1}{j+1}$,

21. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}2^{-k}=2^n$,

22. $\sum_{k=1}^{\infty}\binom{2n+k}{n}2^{-k}=2^{2n}$,

23. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{n}2^{k}=2^{2n}$,

24. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}=2^{2n}$,

25. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}x^k=\frac{(1+\sqrt{x})^n+(1-\sqrt{x})^n}{2}$,

26. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n}{2k}=(-1)^{\frac{n}{2}}2^n\frac{1+(-1)^n}{2}$,

27. $\sum_{k=m}^{n-1}\binom{k-1}{m-1}\frac{1}{n-k}=\binom{n-1}{m-1}\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{k}$,

28. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}^{-1}=\frac{x+1}{x+2}\left\{1+\frac{(-1)^n}{\binom{x+1}{n+1}}\right\}$,

29. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}^{-1}=\frac{x}{x-1}\left\{1-\frac{1}{\binom{x+n}{n+1}}\right\}$,

30. $\sum_{k=1}^{r}(n-2k)\binom{n}{k}^{-1}=1-(n+1)\binom{n+1}{r+1}^{-1}$,

31. $\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{r}^{-1}=\frac{n}{r-1}\binom{n}{r}^{-1}\quad(r>1)$,

32. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\binom{k+n}{k}^{-1}=\frac{1}{n}\quad(n\geqslant 1)$,

33. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\binom{2k}{k}^{-1}=\frac{\pi^2}{18}$,

34. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{r}^{-1}=\frac{r}{r-1}\left\{\binom{x-1}{r-1}^{-1}-\binom{n+x}{r-1}^{-1}\right\}$,

35. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}=\binom{x+y}{n}$,

36. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+k}{k}\binom{y+n-k}{n-k}=\binom{x+y+n+1}{n}$,

37. $\sum_{k=r}^{n-s}\binom{k}{r}\binom{n-k}{s}=\binom{n+1}{r+s+1}$,

38. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x+y-n}{x-k}=\binom{x+y}{x}$,

39. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x}{2n-2k}=\frac{1}{2}\binom{2x}{2n}+\frac{(-1)^n}{2}\binom{x}{n}$,

40. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{x}{2k}\binom{2n-x}{n-2k}=\frac{1}{2}\left\{\binom{2n}{n}+(-1)^n2^{2n}\binom{\frac{x-1}{2}}{n}\right\}$,

41. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{x}{2k+1}\binom{2n-x}{n-2k-1}=\frac{1}{2}\left\{\binom{2n}{n}-(-1)^n 2^{2n}\binom{\frac{x-1}{2}}{n}\right\}$,

42. $\sum_{k=0}^{r}\binom{x}{k}\binom{-x}{n-k}=-\frac{x-r}{n}\binom{x}{r}\binom{-x-1}{n-r-1}$

$$=\frac{n-r}{n}\binom{x-1}{r}\binom{-x}{n-r}$$

$$=-\sum_{k=r+1}^{n}\binom{x}{k}\binom{-x}{n-k}\quad (n\geqslant 1,\ 0\leqslant r\leqslant n),$$

43. $\sum_{k=0}^{r}\binom{x}{k}\binom{1-x}{n-k}=\frac{(n-1)(1-x)-r}{n(n-1)}\binom{x-1}{r}\binom{-x}{n-r-1}$

$$(n\geqslant 2,\ 0\leqslant r\leqslant n-1),$$

44. $\sum_{k=0}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\binom{\frac{1}{2}}{k}=\binom{-\frac{1}{2}}{n}\binom{-\frac{3}{2}}{n}=(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2$,

45. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k+r}=\binom{n+x}{n+r}$,

46. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x+n-k-1}{n-k}=\binom{x+2n-1}{2n}$,

47. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k+1}\binom{x+n-k-1}{n-k}=\binom{x+2n}{2n+1}$,

48. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2x}{2k}\binom{x-k}{n-k}=\frac{x}{x+n}\binom{x+n}{2n}2^{2n}$,

49. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2x+1}{2k+1}\binom{x-k}{n-k}=\frac{2x+1}{2n+1}\binom{x+n}{2n}2^{2n}$,

50. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+2x}{k+x}=\binom{2x+2n}{x+n}$,

51. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k-r}=\binom{n+x}{n-r}$,

52. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k}k=n\binom{x+n-1}{n}$,

53. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{x}{k}\binom{x}{n-k} = (-1)^{\frac{n}{2}}\binom{x}{\frac{n}{2}}\frac{1+(-1)^n}{2}$

$$= \binom{x}{n}\frac{2^x (x-n)!\sqrt{\pi}}{(x-n/2)!\left(-n/2-\frac{1}{2}\right)!},$$

54. $\sum_{k=r}^{n-r}(-1)^k\binom{k}{r}\binom{n-k}{r} = (-1)^r\binom{n/2}{r}\frac{1+(-1)^n}{2},$

55. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{x}{k}\binom{x}{2n-k} = (-1)^n\binom{x}{n},$

56. $\sum_{k=-n}^{n}(-1)^k\binom{2n}{n-k}\binom{2r}{r-k} = \binom{2n}{n}\binom{2r}{r}\Big/\binom{n+r}{n}$

$$= \frac{(2n)!(2r)!}{(n+r)!n!r!},$$

57. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2x+1}{k}\binom{2n-2x-1}{n-k} = (-1)^n 2^{2n}\binom{x}{n},$

58. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{x+k}{r} = (-1)^n\binom{x}{r-n},$

59. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{x+k}{r+k} = (-1)^n\binom{x}{n+r},$

60. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$

61. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}^2 = \frac{1}{2}\binom{4n}{2n} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}^2,$

62. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}^2 = \frac{1}{2}\binom{4n+2}{2n+1},$

63. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-2k}{n-k}\binom{2k}{k} = 2^{2n},$

64. $\sum_{k=0}^{n}\binom{4n-4k}{2n-2k}\binom{4k}{2k} = 2^{2n-1}\binom{2n}{n} + 2^{4n-1},$

65. $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n+r} = 2^{n-r}\binom{n}{r},$

66. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\binom{2n+2k}{n+k}3^{2n-k}=\binom{2n}{n}$,

67. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n}2^{2n-2k}=\binom{4n+1}{2n}$,

68. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k-1}{n-1}=1 \quad (n\geqslant 1)$,

69. $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n+1}{k}\binom{2n-2k-1}{n}=\frac{1}{2}n(n+1) \quad (n\geqslant 1)$,

70. $\sum_{k=0}^{n}\binom{4n+1}{2n-2k}\binom{k+n}{n}=2^{2n}\binom{3n}{n}$,

71. $\sum_{k=0}^{n}\binom{4n}{2n-2k}\binom{k+n}{n}=\frac{2}{3}2^{2n}\binom{3n}{n}$,

72. $\sum_{k=j}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{2k}\binom{k}{j}=2^{n-2j-1}\binom{n-j}{j}\frac{n}{n-j}$,

73. $\sum_{k=j}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n+1}{2k+1}\binom{k}{j}=2^{n-2j}\binom{n-j}{j}$,

74. $\sum_{k=0}^{n}\frac{x}{x+kz}\binom{x+kz}{k}\frac{y}{y+(n-k)z}\binom{y+(n-k)z}{n-k}$

$$=\frac{x+y}{x+y+nz}\binom{x+y+nz}{n},$$

75. $\binom{nd}{n}=d(d-1)\sum_{k=1}^{n}\frac{(dk-2)!}{(k-1)!(dk-k)!}\binom{nd-kd}{n-k}$,

76. $\sum_{k=0}^{m}\binom{-x}{k}\binom{x}{n+k}=\frac{x}{x-n}\binom{-x-1}{m}\binom{x-1}{n+m}$,

77. $\sum_{k=0}^{m}\binom{-x}{a-k}\binom{x}{b-k}=\binom{x+a}{b}\binom{b-x}{a} \quad (m=\min(a, b))$,

78. $\sum_{k=0}^{s-1}\binom{k}{n}\binom{k+m}{m}=\binom{s}{n}\binom{s+m}{m}\frac{s-n}{m+n+1}$,

79. $\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{x-1-k}{n-k}\binom{x+k}{n+k}=\binom{x}{n}^2$,

80. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}\binom{x+k}{2n}=\binom{2x}{2n}$,

81. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+2}{2k+1}\binom{x+k}{2n+1}=\binom{2x}{2n+1}$,

82. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}\binom{x+k}{2n}=\binom{2x+1}{2n}$,

83. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{2k}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k}=\binom{2x}{2n}$,

84. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x+1}{2k+1}\binom{x-2k}{n-k}2^{2k+1}=\binom{2x+2}{2n+1}$,

85. $$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}\binom{m-1}{a+m-k}=(-1)^{m+n+a}\binom{2n-a}{n}$$
$$(m=2n+1-a),$$

86. $$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\binom{2n}{k}\binom{2x}{x-n+k}\binom{2z}{z-n+k}$$
$$=(-1)^{n}\frac{(n+x+z)!\,(2n)!\,(2x)!\,(2z)!}{(n+x)!\,(n+z)!\,(x+z)!\,n!\,x!\,z!},$$

87. $\sum_{k=-m}^{m}(-1)^{k}\binom{m+n}{m+k}\binom{n+p}{n+k}\binom{p+m}{p+k}=\frac{(m+n+p)!}{m!\,n!\,p!}$,

88. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\binom{2n}{k}^{3}=(-1)^{n}\binom{2n}{n}\binom{3n}{n}=(-1)^{n}\frac{(3n)!}{n!^{3}}$,

89. $\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k}\binom{k}{j}=\binom{x}{j}\binom{y+x-j}{n-j}$,

90. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\binom{k}{n-j}=\binom{n}{j}\binom{n+j}{j}$,

91. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\binom{x+k}{2n}=\binom{x}{n}^{2}$,

92. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{2}\binom{x+2n-k}{2n}=\binom{x+n}{n}^{2}$,

93. $\sum_{k}\binom{b}{k}\binom{c}{k-d}\binom{a+k}{b+c}=\binom{a}{b-d}\binom{a+d}{c+d}$,

94. $\sum_{k} \binom{b}{k}\binom{c}{d-k}\binom{a+k}{b+c} = \binom{a}{b+c-d}\binom{a-c+d}{d}$,

95. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m+n-k}{m-k}\binom{x}{m+n-k} = \binom{x}{m}\binom{x}{n}$,

96. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m}{n-k}\binom{x+n-k}{n+m} = \binom{x}{m}\binom{x}{n}$,

97. $\sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{k}\binom{x+y+n-k}{n-k} = \binom{x+n}{n}\binom{y+n}{n}$,

98. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{r}{k}\binom{x+n+r+k}{n+r} = \binom{x+n+r}{n}\binom{x+n+r}{r}$

99. $\sum_{k=0}^{m} \binom{x+y+k}{k}\binom{y}{a-k}\binom{x}{b-k} = \binom{x+a}{b}\binom{y+b}{a}$

$(m = \min(a,\ b))$.

参考书目

[1] Riordan, J. Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley & Sons, 1958.

[2] Hall, M. Combinatorial Theory, Blaisdell Pub. Co., 1967.

[3] Ryser, H. J. Combinatorial Mathematics, Carus Math. Monographs No. 14, New York Math. Ass. Amer., 1963.

[4] Aigner, M. Combinatorial Theory, Springer-Verlag, 1979.

[5] Gould, H.W., Combinatorial Identities, Morgantown, W. Va., 1972.

[6] Beckenbach, E. F. ed. Applied Combinatorial Mathematics, John Wiley & Sons, 1964.

[7] Gilbert, W. J., Modern Albegra With Applications, John Wiley & Sons, 1976.

[8] Berge, C. Theorie des Graphes et ses Applications. Dunod, Paris, 1958.[有中译本，李修睦译]

[9] Harary, Fr., Graph Theory, Addison-Wesley Pub. Co., 1969. [有中译本，李慰萱译]